

OSTRAVSKÁ UNIVERZITA

Pedagogická fakulta

LINEÁRNÍ ALGEBRA

Distanční text

Radek Krpec



UNIVERSITAS
OSTRAVIENSIS

OSTRAVA 2007

Obsah

| | |
|--|-----------|
| Úvodní poznámky | 7 |
| Číselné množiny a jejich označení | 9 |
| Klíčová slova | 9 |
| Kontrolní otázky | 10 |
| Matice | 11 |
| Klíčová slova | 11 |
| Matice typu (m, n) | 11 |
| i -tý řádek a j -tý sloupec matice | 12 |
| Řádková a sloupcová matice | 12 |
| Nulová matice | 13 |
| Čtvercová matice | 13 |
| Diagonální matice | 14 |
| Jednotková matice | 14 |
| Horní a dolní trojúhelníková matice | 14 |
| Symetrická matice | 15 |
| Antisymetrická matice | 15 |
| Hlavní a vedlejší diagonála matice | 16 |
| Pojmy k zapamatování | 17 |
| Kontrolní otázky | 17 |
| Neřešené úlohy | 18 |
| Výsledky neřešených úloh | 18 |
| Rovnost matic, operace s maticemi | 21 |
| Klíčová slova | 21 |
| Rovnost matic | 21 |
| Součet matic | 21 |
| Opačná matice | 23 |
| Rozdíl matic | 23 |
| Skalární násobek matice | 24 |
| Součin matic | 24 |
| Záměnné matice | 27 |
| Mocnina matice | 29 |
| Matice transponovaná | 29 |
| Pojmy k zapamatování | 31 |
| Kontrolní otázky | 31 |
| Neřešené úlohy | 31 |
| Výsledky neřešených úloh | 32 |
| Determinant matice | 35 |
| Klíčová slova | 35 |
| Determinant matice | 35 |
| Regulární matice | 46 |
| Inverzní matice | 46 |
| Adjungovaná matice | 47 |

| | |
|---|-----------|
| Pojmy k zapamatování | 47 |
| Kontrolní otázky | 48 |
| Neřešené úlohy | 48 |
| Výsledky neřešených úloh | 51 |
| Aritmetický vektorový prostor | 53 |
| Klíčová slova | 53 |
| Aritmetický vektorový prostor | 53 |
| Nulový vektor | 53 |
| Součet vektorů | 53 |
| Opačný vektor | 54 |
| Skalární násobek | 54 |
| Lineární kombinace vektorů | 55 |
| Lineární závislost vektorů | 55 |
| Podprostor vektorového prostoru V_n | 57 |
| Triviální podprostor | 57 |
| Podprostor generovaný množinou vektorů vektorového prostoru | 57 |
| Báze podprostoru | 57 |
| Dimenze vektorového prostoru | 58 |
| Pojmy k zapamatování | 58 |
| Kontrolní otázky | 59 |
| Neřešené úlohy | 59 |
| Výsledky neřešených úloh | 59 |
| Soustavy lineárních rovnic a jejich řešení | 61 |
| Klíčová slova | 61 |
| Soustava lineárních rovnic | 61 |
| Maticový zápis soustavy rovnic | 62 |
| Homogenní a nehomogenní soustava rovnic | 63 |
| Pojmy k zapamatování | 64 |
| Kontrolní otázky | 64 |
| Cramerovské soustavy | 65 |
| Klíčová slova | 65 |
| Cramerovská soustava lineárních rovnic | 65 |
| Pojmy k zapamatování | 67 |
| Kontrolní otázky | 67 |
| Neřešené úlohy | 68 |
| Výsledky neřešených úloh | 69 |
| Hodnost matice a její výpočet | 71 |
| Klíčová slova | 71 |
| Podmatice matice | 71 |
| Hodnost matice | 72 |
| Elementární úprava matice | 73 |
| Stupňový resp. Gaussův tvar | 74 |
| Pojmy k zapamatování | 77 |
| Kontrolní otázky | 77 |

| | |
|--|-----------|
| Neřešené úlohy | 77 |
| Výsledky neřešených úloh | 78 |
| Řešitelné soustavy | 79 |
| Klíčová slova | 79 |
| Ekvivalentní řešitelné soustavy | 79 |
| Pojmy k zapamatování | 82 |
| Kontrolní otázky | 82 |
| Neřešené úlohy | 82 |
| Výsledky neřešených úloh | 84 |
| Homogenní soustavy | 85 |
| Klíčová slova | 85 |
| Triviální řešení soustavy | 85 |
| Obecné řešení homogenní soustavy | 86 |
| Pojmy k zapamatování | 89 |
| Kontrolní otázky | 89 |
| Neřešené úlohy | 89 |
| Výsledky neřešených úloh | 90 |
| Literatura | 92 |
| Použité symboly | 93 |

Úvodní poznámky

Tento učební text je další ze souboru učebních textů určených především pro posluchače kombinovaného a rozšiřujícího studia učitelství matematiky pro 2. stupeň ZŠ. V první kapitole jsou shrnuty základní pojmy o množinách, další tři kapitoly jsou pak již věnovány základním pojmům a poznatkům, které se týkají matic, operací s maticemi a determinantu matice. V páté kapitole se v krátké pasáži zabýváme aritmetickými vektorovými prostory. Další kapitoly jsou pak věnovány soustavám lineárních rovnic a jejich řešení.

Výběr učební látky a způsob jejího zpracování bylo nutno přizpůsobit omezené časové dotaci pro předmět Lineární algebra v učebním plánu zmíněných studií a také distanční formě tohoto studia. Proto jsme se rozhodli pro volné řazení jednotlivých témat a protože podrobné provedení všech důkazů by neúměrně zvětšilo rozsah tohoto textu, byly vynechány. Předpokládáme přitom, že některé z nich budou provedeny vyučujícím v rámci konzultací, zbytek však budou muset posluchači zvládnout samostatně s využitím další literatury. Pro usnadnění studia byly do úvodu každého odstavce zařazeny přehledy klíčových slov, v závěru odstavce pak čtenář nalezne soubor kontrolních otázek, na nichž si může ověřit, do jaké míry dané téma pochopil a zvládl. Do každého odstavce byly zařazeny demonstrační příklady a řešené úlohy, v závěru odstavce jsou k dispozici také příklady k samostatnému řešení s výsledky.

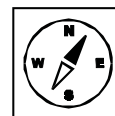
Připomínáme ještě, že tento text podobně jako všechny ostatní učební texty kombinovaného a rozšiřujícího studia bude k dispozici na příslušných webových stránkách Pedagogické fakulty Ostravské univerzity.

Ostrava, 2007

Radek Krpec

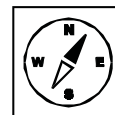
1 Číselné množiny a jejich označení.

Cílem této kapitoly je zopakovat základní pojmy z oblasti teorie množin potřebné pro další výklad lineární algebry. Po prostudování této kapitoly si student zopakuje pojmy množina, býti prvkem množiny, bude znát označení základních číselných množin.



1.1 Klíčová slova.

množina, prvek množiny, množina přirozených, celých racionálních, reálných a komplexních čísel.



Při studiu lineární algebry s použitím tohoto učebního textu se předpokládá, že čtenář už něco ví o *množinách* a způsobu jejich určení, o *množinové inkluzi*, o *operacích s množinami*, a také o *binárních relacích* a *zobrazeních*. Připomeňme si pouze, že množiny budeme v textu většinou označovat velkými písmeny A, B, C, \dots , jejich prvky malými písmeny a, b, c, \dots , přičemž bude-li to zapotřebí, budeme při označování množin a jejich prvků užívat také indexy. Tvrzení „ a je prvkem množiny A “ budeme symbolicky zapisovat ve tvaru $a \in A$, jeho negaci pak ve tvaru $a \notin A$.

V mnoha úvahách v matematice je užitečné předpokládat, že množiny, o nichž je řeč, byly vytvořeny z prvků nějaké předem zvolené množiny U , která se pak nazývá *univerzální* nebo také *základní*. Užitečnost tohoto předpokladu spočívá v tom, že univerzální množinou je vždy a priori určen rámec příslušné úvahy.

V roli základních množin velmi často figurují známé *číselné množiny*, pro něž si v tomto textu zavedeme následující standardní označení:

\mathbb{N} ... množina všech přirozených čísel bez nuly,

\mathbb{N}_0 ... množina všech přirozených čísel s nulou,

\mathbb{N}_k ... množina $\{1, \dots, k\}$ prvních k přirozených čísel pro libovolné $k \in \mathbb{N}$,
tj. $\mathbb{N}_k = \{1, \dots, k\}$,

\mathbb{Z} ... množina všech celých čísel,

\mathbb{Q} ... množina všech racionálních čísel,

\mathbb{R} ... množina všech reálných čísel,

\mathbb{C} ... množina všech komplexních čísel.

Na závěr tohoto odstavce ještě poznamenejme, že symbolem \mathbf{T} budeme dále označovat buď množinu všech reálných čísel \mathbb{R} , anebo množinu všech komplexních čísel \mathbb{C} . Jinými slovy řečeno, pokud nebude výslovně uvedeno jinak, mohou být prvky množiny \mathbf{T} jak čísla reálná, tak i čísla komplexní.



1.2 Kontrolní otázky.

Co je to množina?

Jaké znáte operace s množinami?

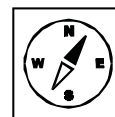
Co je to binární relace?

Co je to zobrazení?

Jak značíme základní číselné množiny?

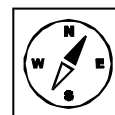
2 Matice.

Cílem v této části je seznámit se s pojmem matice. Student bude umět po prostudování rozeznávat a pojmenovávat různé typy matic.



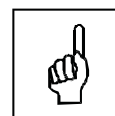
2.1 Klíčová slova.

matice, řádek a sloupec matice, řádková a sloupcová matice, nulová matice, čtvercová matice, diagonální matice, jednotková matice, horní a dolní trojúhelníková matice, symetrická a antisymetrická matice, hlavní a vedlejší diagonála matice.

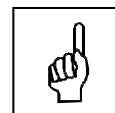


2.2 Definice. Matice typu (m, n) .

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$ jsou přirozená čísla. Pak každou uspořádanou dvojici $(i, j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$ nazveme *místem*, číslo i nazveme jeho *řádkovým indexem* a číslo j pak jeho *sloupcovým indexem*. *Maticí typu (m, n) nad \mathbf{T}* nazveme pak libovolné zobrazení množiny $\mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$ do množiny \mathbf{T} přiřazující každému místu $(i, j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$ jistý prvek z \mathbf{T} , který symbolicky označíme a_{ij} a budeme jej nazývat *prvkem* dané matice. Množinu všech matic typu (m, n) nad \mathbf{T} budeme označovat symbolem $\mathbf{T}_{m,n}$.



Jednotlivé matice budeme dále označovat velkými písmeny A, B, C, \dots a budeme je zapisovat *explicitním tabulkovým zápisem* tvaru



$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

anebo stručněji v některém z těchto tvarů:

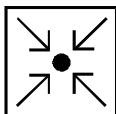
$$(a_{ij})_{m,n},$$

resp.

$$(a_{ij}) \text{ typu } (m, n),$$

anebo také

$$(a_{ij}), i \in \mathbb{N}_m, j \in \mathbb{N}_n.$$



2.3 Příklad.

Explicitním tabulkovým zápisem vyjádřete matici A typu $(3, 5)$, kde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j, \\ 0 & \text{pro } i \neq j. \end{cases}$$

Řešení:

Je zřejmé, že prvky matice A vypadají takto:

$$\begin{array}{lll} a_{11} = 1 & a_{21} = 2 & a_{31} = 2 \\ a_{12} = 2 & a_{22} = 1 & a_{32} = 2 \\ a_{13} = 2 & a_{23} = 2 & a_{33} = 1 \\ a_{14} = 2 & a_{24} = 2 & a_{34} = 2 \\ a_{15} = 2 & a_{25} = 2 & a_{35} = 2 \end{array}$$

Umístíme-li nyní prvky matice A na jednotlivá místa způsobem, který je popsán definicí 2.2, dostaneme explicitní tabulkový zápis této matice ve tvaru

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.4 Definice. i -tý řádek a j -tý sloupec matice.

Nechť A je libovolná matice typu (m, n) nad \mathbf{T} mající explicitní tabulkový zápis tvaru

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Jsou-li nyní $i \in \mathbb{N}_m$ a $j \in \mathbb{N}_n$ libovolně zvolená přirozená čísla, pak o prvcích

$$a_{i1}, \dots, a_{in}$$

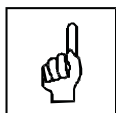
řekneme, že tvoří i -tý řádek matice A , a podobně o prvcích

$$a_{1j}, \dots, a_{mj}$$

budeme říkat, že tvoří j -tý sloupec matice A .

2.5 Definice. Řádková a sloupcová matice.

Matici typu $(1, n)$ budeme nazývat *řádkovou maticí* nebo také *řádkem*, a po-



dobně matici typu $(m, 1)$ budeme nazývat *sloupcovou maticí* nebo také jen *sloupcem*.

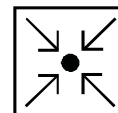
2.6 Příklad.

Řádkové matice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

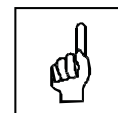
Sloupcová matice:

$$B = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$



2.7 Definice. Nulová matice.

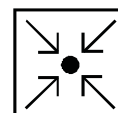
Matici (a_{ij}) typu (m, n) budeme nazývat *nulovou maticí*, jestliže pro každé místo $(i, j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$ platí $a_{ij} = 0$. Nulovou matici typu (m, n) budeme značit symbolem $0_{m,n}$, případně také jen 0 , bude-li její typ dostatečně zřejmý z kontextu. Matice, která není nulová, se nazývá *nenulová*.



2.8 Příklad.

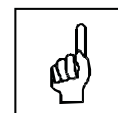
Nulová matice stupně $(4, 3)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



2.9 Definice. Čtvercová matice.

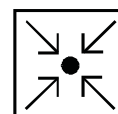
Matici typu (m, m) budeme nazývat *čtvercovou maticí řádu m* resp. *m -tého řádu*, a budeme-li dále hovořit o *matici řádu m* , budeme tím vždy rozumět čtvercovou matici typu (m, m) .



2.10 Příklad.

Čtvercová matice řádu 4:

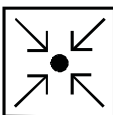
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$





2.11 Definice. Diagonální matice.

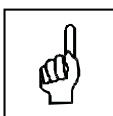
Matice (a_{ij}) řádu m se nazývá *diagonální*, jestliže pro každé $(i, j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_m$, kde $i \neq j$, platí $a_{ij} = 0$.



2.12 Příklad.

Diagonální matice řádu 3:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

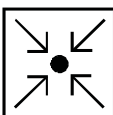


2.13 Definice. Jednotková matice.

Matice (a_{ij}) řádu m se nazývá *jednotková*, jestliže pro každé místo $(i, j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_m$ platí

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j, \\ 0 & \text{pro } i \neq j. \end{cases}$$

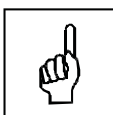
Jednotkovou matici řádu m budeme značit symbolem E_m , případně také pouze E , bude-li její řád dostatečně zřejmý z kontextu.



2.14 Příklad.

Jednotková matice řádu 5:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



2.15 Definice. Horní a dolní trojúhelníková matice.

Matice (a_{ij}) řádu m se nazývá *horní trojúhelníková*, resp. *dolní trojúhelníková*, jestliže pro každé místo $(i, j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_m$ platí

$$a_{ij} = 0 \quad \text{pro } i > j,$$

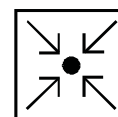
resp.

$$a_{ij} = 0 \quad \text{pro } i < j.$$

2.16 Příklad.

Horní trojúhelníková matice řádu 4:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

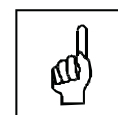


Dolní trojúhelníková matice řádu 3:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

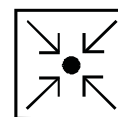
2.17 Definice. Symetrická matice.

Matice (a_{ij}) řádu m se nazývá *symetrická*, jestliže pro každé místo $(i, j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_m$ platí $a_{ij} = a_{ji}$.

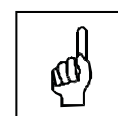
**2.18 Příklad.**

Symetrická matice řádu 4:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -5 & 8 \\ 4 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

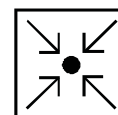
**2.19 Definice. Antisymetrická matice.**

Matice (a_{ij}) řádu m se nazývá *antisymetrická*, jestliže pro každé místo $(i, j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_m$ platí $a_{ij} = -a_{ji}$.

**2.20 Příklad.**

Antisymetrická matice řádu 4:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



Poněkud názornější představu o jednotlivých typech čtvercových matic lze získat pomocí pojmu *hlavní diagonála* čtvercové matice, který zavedeme následující definicí.

2.21 Definice. Hlavní a vedlejší diagonála matice.

Je-li a_{ij} matice řádu m , pak o prvcích

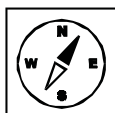
$$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm}$$

řekneme, že tvoří její *hlavní diagonálu*, a podobně o prvcích

$$a_{1m}, a_{2,m-1}, \dots, a_{m1}$$

budeme říkat, že tvoří *vedlejší diagonálu* této matice.

S využitím pojmu hlavní diagonály lze nyní charakterizovat jednotlivé výše uvedené typy čtvercových matic takto:



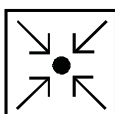
2.22 Věta.

Nechť $A = (a_{ij})$ je libovolná matice řádu m . Pak platí:

- (i) Matice A je diagonální, právě když všechny její prvky mimo hlavní diagonálu jsou rovny 0.
- (ii) Matice A je jednotková, právě když všechny její prvky na hlavní diagonále jsou rovny 1 a všechny ostatní jsou rovny 0.
- (iii) Matice A je horní trojúhelníková, právě když všechny její prvky pod hlavní diagonálou jsou rovny 0.
- (iv) Matice A je dolní trojúhelníková, právě když všechny její prvky nad hlavní diagonálou jsou rovny 0.
- (v) Matice A je symetrická, právě když všechny dvojice jejích prvků, které jsou umístěny souměrně podle hlavní diagonály, se rovnají.
- (vi) Matice A je antisymetrická, právě když všechny dvojice jejích prvků, které jsou umístěny souměrně podle hlavní diagonály, jsou čísla opačná, přičemž všechny prvky hlavní diagonály jsou rovny 0.

2.23 Příklad.

Doplňte chybějící prvky tak, aby matice A byla symetrická, B antisymetrická. Rozhodněte, kdy je řešení jednoznačné.



$$A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & -3 & \cdot & \cdot \\ 4 & 8 & 0 & \cdot \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 4 & 8 & \cdot & \cdot \\ 6 & 2 & 1 & \cdot \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Aby byla matice A symetrická, dvojice prvků souměrné podle hlavní diagonály se musí rovnat. Na hlavní diagonále mohou být jakékoliv prvky, tedy řešení není jednoznačné. Jedno z možných řešení je tedy

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 8 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aby byla matice B antisymetrická, dvojice prvků souměrné podle hlavní diagonály musí být opačné. Na hlavní diagonále musí být samé nuly, tedy řešení je jednoznačné a je rovno

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 & -6 \\ -3 & 0 & -8 & -2 \\ 4 & 8 & 0 & -1 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.24 Pojmy k zapamatování.

Matice,

i -tý řádek a j -tý sloupec matice,

čtvercová matice,

nulová a jednotková matice,

diagonální matice,

trojúhelníkové matice,

symetrická a antisymetrická matice.



2.25 Kontrolní otázky.

Jak je definována matice typu (m, n) ?

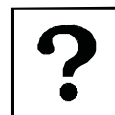
Kolik sloupců má sloupcová matice?

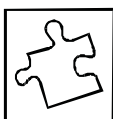
Jaké prvky má na hlavní diagonále jednotková matice?

Jaké prvky má mimo hlavní diagonálu diagonální matice?

Jaký je vztah mezi prvky a_{34} a a_{43} symetrické a antisymetrické matice řádu 4?

Když mluvíme o řádu matice a víme, že tato matice má 5 řádků, kolik bude mít sloupců?





2.26 Neřešené úlohy.

1. Proveďte explicitní tabulkový zápis matice

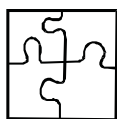
$$(a) A = (a_{ij}) \text{ typu } (3, 5), \text{ kde } a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{pro } i = j \\ -2 & \text{pro } i \neq j \end{cases};$$

$$(b) B = (b_{ij}) \text{ řádu } 4, \text{ kde } b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i \leq j \\ 2 & \text{pro } i > j \end{cases};$$

$$(c) C = (c_{ij}) \text{ typu } (5, 3), \text{ kde } c_{ij} = (-1)^{i \cdot j}.$$

2. Doplňte chybějící prvky tak, aby matice byla (a) symetrická, (b) antisymetrická, (c) trojúhelníková.

$$A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 6 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & -2 & -4 & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & -1 & \cdot \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cdot & -2 & 1 & 3 \\ \cdot & \cdot & 0 & 4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 5 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$



2.27 Výsledky neřešených úloh.

1. (a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. (a)

$$A = \begin{pmatrix} \cdot & 6 & -1 & 3 & 1 \\ 6 & \cdot & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & \cdot & -4 & 1 \\ 3 & -2 & -4 & \cdot & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & \cdot \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cdot & -2 & 1 & 3 \\ -2 & \cdot & 0 & 4 \\ 1 & 0 & \cdot & 5 \\ 3 & 4 & 5 & \cdot \end{pmatrix}.$$

Na diagonále mohou být jakékoliv prvky.

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 1 & -3 & -1 \\ 6 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 5 \\ -3 & -4 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

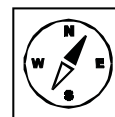
(c)

$$A = \begin{pmatrix} \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \cdot & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -4 & \cdot & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & \cdot \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cdot & -2 & 1 & 3 \\ 0 & \cdot & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \cdot & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix}.$$

Na diagonále mohou být jakékoliv prvky.

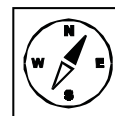
3 Rovnost matic, operace s maticemi.

Cílem v této kapitole je seznámit se s některými vztahy matic a operacemi s maticemi. Po prostudování bude umět student rozpoznat, kdy jsou dvě matice sobě rovné, kdy jsou opačné. Měl by umět provést součet a rozdíl dvou matic téhož typu, skalární násobek matice, součin dvou matic a mocninu matice.



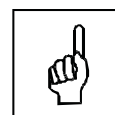
3.1 Klíčová slova.

Rovnost matic, opačné matice, součet a rozdíl matic, součin matic, záměnné matice, mocnina matice, transponovaná matice.



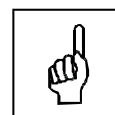
3.2 Definice. Rovnost matic.

Dvě matice $A = (a_{ij})$ typu (m, n) a $B = (b_{ij})$ typu (p, q) pokládáme za *sobě rovné*, jsou-li *téhož typu*, tj. je-li $m = p$ a $n = q$, a platí-li pro každé místo $(i, j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$ rovnost $a_{ij} = b_{ij}$. V takovém případě píšeme $A = B$. V opačném případě hovoříme pak o *různých maticích* a píšeme $A \neq B$.



Poznámka.

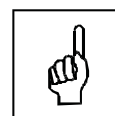
Na základě uvedené definice není obtížné nahlédnout, že dvě matice se rovnají, právě když jsou téhož typu a rovnají-li se dvojice jejich *stejnolehlých prvků*, tj. prvků, které odpovídají témuž místu v obou maticích.



3.3 Definice. Součet matic.

Pro každé dvě matice $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ téhož typu (m, n) definujeme jejich *součet* $A + B$ jako matici $C = (c_{ij})$ typu (m, n) takovou, že pro každé místo $(i, j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$ platí

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$



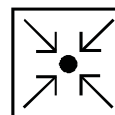
Poznámka.

Z právě uvedené definice je zřejmé, že dvě matice téhož typu sečteme tak, že sečteme stejnohlé prvky obou matic.

3.4 Příklad.

Určete součet matic A a B , jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$



Řešení:

Podle definice 3.3 s využitím výše uvedené poznámky snadno dojdeme k výsledku

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Vlastnosti operace sčítání matic souhrnně popisuje následující tvrzení.

3.5 Věta.

Sčítání matic se řídí následujícími pravidly:

(i) Jsou-li $A, B \in \mathbf{T}_{m,n}$ libovolné matice, pak

$$A + B = B + A.$$

(ii) Jsou-li $A, B, C \in \mathbf{T}_{m,n}$ libovolné matice, pak

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

(iii) Je-li $A \in \mathbf{T}_{m,n}$ libovolná matice a $0 \in \mathbf{T}_{m,n}$ matice nulová, pak

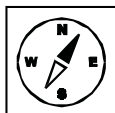
$$A + 0 = 0 + A = A.$$

(iv) Je-li $A \in \mathbf{T}_{m,n}$ libovolná matice a $D = d_{ij} \in \mathbf{T}_{m,n}$ taková, že pro každé místo $(i, j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$ platí $d_{ij} = -a_{ij}$, pak platí

$$A + D = D + A = 0$$

Poznámka.

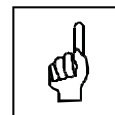
Jednotlivé vlastnosti operace sčítání matic jsou zřejmě bezprostředním důsledkem známých vlastností operace sčítání reálných resp. komplexních čísel, které se obvykle uvádějí pod názvem „zákony“. Tento název se pak přenáší i na operaci sčítání matic, takže tvrzení (i) nazýváme obvykle *komutativním zákonem* a podobně tvrzení (ii) pak *asociativním zákonem* pro tuto operaci. Tvrzení (iii) zřejmě vyjadřuje okolnost, že nulová matice 0 neovlivňuje součet s libovolnou další maticí, tj. chová se při sčítání „neutrálně“, a to je také důvod, proč se toto tvrzení nazývá *podmínkou neutrálního prvku*, kterým je nulová matice



0. Abychom mohli pojmenovat i poslední z výše uvedených tvrzení, musíme nejprve zavést jeden nový pojem.

3.6 Definice. Opačná matice.

Je-li $A = (a_{ij}) \in \mathbf{T}_{m,n}$ a $D = (d_{ij}) \in \mathbf{T}_{m,n}$ taková, že pro každé místo $(i, j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$ platí $d_{ij} = -a_{ij}$, pak matici D budeme nazývat *opačnou maticí* k matici A a budeme ji označovat symbolem $-A$.

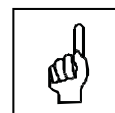


Poznámka.

Výše uvedenou vlastnost (iv) z tvrzení 3.5 lze nyní vyjádřit přehledněji zápisem

$$A + (-A) = (-A) + A = 0$$

a nazývá se obvykle *podmínkou existence opačného prvku*, kterým je v tomto případě opačná matice $-A$. Poznamenejme ještě, že platnost této podmínky umožňuje kromě jiného zavést také operaci *odčítání matic* zcela analogicky, jako se zavádí operace odčítání čísel.



3.7 Definice. Rozdíl matic.

Pro každé dvě matice $A, B \in \mathbf{T}_{m,n}$ definujme *rozdíl* $A - B$ jako matici definovanou vztahem

$$A - B = A + (-B).$$



3.8 Příklad.

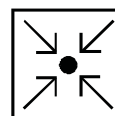
Proveďte rozdíl matic $A - B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Rozdíl provedeme dle výše uvedené definice:

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -3 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 3 & -1 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 1 \\ 9 & -7 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



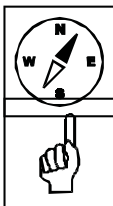
3.9 Definice. Skalární násobek matice.



Pro každou matici $A = (a_{ij})$ typu (m, n) nad \mathbf{T} a pro každý prvek $\alpha \in \mathbf{T}$ definujeme *skalární násobek* resp. α -*násobek* $\alpha \cdot A$ jako matici $B = (b_{ij})$ typu (m, n) takovou, že pro každé místo $(i, j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$ platí

$$b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}.$$

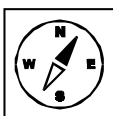
Tam, kde nemůže dojít k nedorozumění místo $\alpha \cdot A$ píšeme obvykle jen αA .



Poznámka.

Operace *násobení matice skalárem* má poněkud jiný charakter, než obě výše zmíněné operace sčítání a odčítání matic, které jsou charakteristické tím, že oba operandy A, B vždy náležejí do téže množiny $\mathbf{T}_{m,n}$ a také výsledek $A + B$ resp. $A - B$ je opět matice z množiny $\mathbf{T}_{m,n}$. V případě násobení skalárem je levý operand α číslo z \mathbf{T} , pravý operand A jakož i výsledek $\alpha \cdot A$ jsou už opět matice z $\mathbf{T}_{m,n}$. Takovéto operaci se zpravidla říká *vnější operace* a tento název charakterizuje právě tu okolnost, že operandy nejsou prvky téže množiny.

Vlastnosti operace násobení matice skalárem shrnuje následující tvrzení.

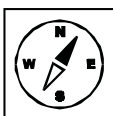


3.10 Věta.

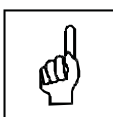
Pro libovolné matice $A, B \in \mathbf{T}_{m,n}$ a libovolné prvky $\alpha, \beta \in \mathbf{T}$ platí:

- (i) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,
- (ii) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
- (iii) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,
- (iv) $1 \cdot A = A$.

Další důležitou maticovou operací je *násobení matice*, kterou popisuje následující definice.



3.11 Definice. Součin matic.



Pro dané matice $A = (a_{ij})$ typu (m, p) a $B = (b_{jk})$ typu (p, n) nazveme *součinem* $A \cdot B$ matici $C = (c_{ik})$ typu (m, n) takovou, že pro každé místo $(i, k) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$ platí

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \cdots + a_{ip} \cdot b_{pk} = \sum_{j=1}^p a_{ij} \cdot b_{jk}.$$

Součin matic $A \cdot B$ budeme psát i bez násobící tečky ve tvaru AB .

Poznámky.

1. Především je nezbytné uvážit, že součin dvou matic $A \cdot B$ je definován pouze tehdy, má-li levý operand A tolik sloupců, kolik má pravý operand B řádků. Odtud pak vyplývá, že zvolíme-li libovolně dvě matice A, B , pak nemusí existovat žádný ze součinů, tj. ani $A \cdot B$ ani $B \cdot A$ v případě, že jejich typy nejsou takové, jaké požaduje definice 6.8. Může se samozřejmě také stát, že existuje pouze jeden z obou uvedených součinů, druhý nikoliv. Tato okolnost se někdy vyjadřuje tím, že operaci násobení matic nazýváme *parciální operací*, čímž máme na mysli právě to, že výsledek není definován pro každou dvojici operandů.
2. Formuli, která popisuje prvky na jednotlivých místech matice $A \cdot B$ je možno poněkud volněji interpretovat takto: prvek matice $A \cdot B$ na místě $(i, k) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$ určíme tak, že jednotlivé prvky i -tého řádku matice A budeme násobit po řadě prvky k -tého sloupce matice B a všechny tyto součiny sečteme.

3.12 Příklad.

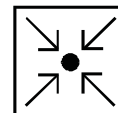
Určete součiny $A \cdot B$ a $B \cdot A$, jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Matice A je typu $(3, 2)$, matice B typu $(2, 2)$, takže je ihned zřejmé, že definován je pouze součin $A \cdot B$, zatímco součin $B \cdot A$ nikoliv. Matice $A \cdot B$ je typu $(3, 2)$, použitím formule pro prvky této matice pak dostaneme

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 7 & 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 0 \\ 2 \cdot (-2) + 5 \cdot 7 & 2 \cdot 5 + 5 \cdot 0 \\ (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot 7 & (-1) \cdot 5 + 3 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ 31 & 10 \\ 23 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$





Vlastnosti operace násobení matic jsou shrnuty do následujícího tvrzení.

3.13 Věta.

Nechť $\mathbf{T}_{m,n}$, $\mathbf{T}_{n,p}$ a $\mathbf{T}_{p,r}$ jsou množiny všech matic typů (m, n) , (n, p) resp. (p, r) s prvky z množiny \mathbf{T} . Pak platí:

- (i) Pro každé tři matice $A \in \mathbf{T}_{m,n}$, $B \in \mathbf{T}_{n,p}$ a $C \in \mathbf{T}_{p,r}$ platí

$$(AB)C = A(BC).$$

- (ii) Pro každé tři matice $A, B \in \mathbf{T}_{m,n}$ a $C \in \mathbf{T}_{n,p}$ platí

$$(A + B)C = (AB) + (AC).$$

- (iii) Pro každé tři matice $A \in \mathbf{T}_{m,n}$ a $B, C \in \mathbf{T}_{n,p}$ platí

$$A(B + C) = (AB) + (AC).$$

- (iv) Pro každé $\alpha \in \mathbf{T}$ a každé dvě matice $A \in \mathbf{T}_{m,n}$ a $B \in \mathbf{T}_{n,p}$ platí

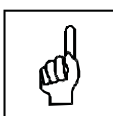
$$\alpha(AB) = (\alpha A)B.$$

- (v) Pro každou matici $A \in \mathbf{T}_{m,n}$ a jednotkové matice E_m a E_n platí

$$E_m A = A, \quad A E_n = A.$$

Poznámka.

Také v tomto případě připomínají přinejmenším první tři vlastnosti (i)–(iii) známé „zákony“ pro operace s čísly a tato podobnost pak vedla k tomu, že dostaly i analogická pojmenování. Tvrzení (i) se obvykle nazývá *asociativní zákon* pro násobení matic, tvrzení (ii) resp. (iii) se nazývá *pravý distributivní zákon* resp. *levý distributivní zákon*. V přehledu vlastností operace násobení matic zdánlivě chybí obdoba komutativního zákona pro násobení, ale ten tam skutečně být nemůže, neboť násobení matic na rozdíl od násobení čísel není komutativní! Názorně to dokumentuje následující úloha.



3.14 Příklad.

Určete součiny AB a BA , jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Obě matice A a B jsou čtvercové řádu 2, takže v tomto případě jsou definovány oba součiny AB i BA a platí:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 6 \\ 0 \cdot 4 + 3 \cdot 5 & 0 \cdot 0 + 3 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 12 \\ 15 & 18 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 4 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \\ 5 \cdot 1 + 6 \cdot 0 & 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 28 \end{pmatrix}.$$

Odtud tedy plyne $AB \neq BA$.

Poznámka.

Z uvedené úlohy je také zřejmé, že součin matic není sice definován pro každé dvě matice, je však definován pro každé dvě čtvercové matice téhož řádu. Omezíme-li se tedy jen na matice z $\mathbf{T}_{n,n}$, pak operace násobení již přestává být parciální! A navíc, i když i v tomto případě násobení matic není komutativní, dají se najít matice $A, B \in \mathbf{T}_{n,n}$ takové, že $AB = BA$. A právě této situace se týká následující definice.

3.15 Definice. Záměnné matice.

O maticích $A, B \in \mathbf{T}_{n,n}$ říkáme, že jsou *záměnné*, jestliže platí $AB = BA$.

3.16 Příklad.

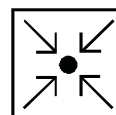
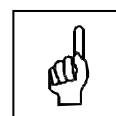
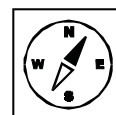
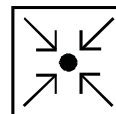
Určete alespoň jednu matici B , která je záměnná s maticí A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Matice B musí být také řádu 3, tedy bude mít tvar

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$



Dále musí platit $AB = BA$, určíme tedy nejdříve součiny AB a BA .

$$AB = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 3a + d + 2g & 3b + e + 2h & 3c + f + 2i \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} a + 3c & b + c & 2c \\ d + 3f & e + f & 2f \\ g + 3i & h + i & 2i \end{pmatrix}.$$

Pokud má tedy platit $AB = BA$, pak musí platit následující rovnosti:

$$a = a + 3c$$

$$b = b + c$$

$$c = 2c$$

$$d = d + 3f$$

$$e = e + f$$

$$f = 2f$$

$$3a + d + 2g = g + 3i$$

$$3b + e + 2h = h + i$$

$$3c + f + 2i = 2i$$

Z první rovnosti je ihned zřejmé, že $c = 0$. Ze čtvrté rovnosti plyne $f = 0$. Po dosazení do ostatních rovností nám zbývají pouze dvě rovnosti a to sedmá a osmá v následujícím tvaru

$$3a + d + g - 3i = 0$$

$$3b + e + 2h - i = 0$$

Máme tedy dvě rovnice o sedmi neznámých. Je zřejmé, že řešení je nekonečně mnoho. Některé z řešení dostaneme tak, že za pět volných neznámých dosadíme a zbývající dvě dopočteme. Zvolme tedy

$$d = 2, \quad g = 1, \quad i = 1, \quad e = 0, \quad h = -1.$$

Po dosazení dostaneme

$$a = 0, \quad b = 1.$$

Jedním z řešení je tedy matice

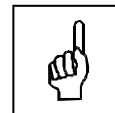
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.17 Definice. Mocnina matice.

Je-li $A \in \mathbf{T}_{n,n}$ libovolná matice řádu n , pak definujeme

$$\begin{aligned} A^0 &= E_n \\ A^k &= A^{k-1} \cdot A \quad \text{pro libovolné } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Takto definovanou matici A^k pro libovolné přirozené číslo $k \in \mathbb{N}$ nazýváme *k-tou mocninou matice A*.

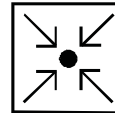
**Poznámka.**

Právě vyslovená definice přirozené mocniny matice je zajímavá svou strukturou, která se opírá o známý *princip úplné matematické indukce*. První z uvedených rovností definuje nultou mocninou matice A , poté se předpokládá, že mocniny matice A jsou již definovány pro všechny exponenty menší než k a na základě tohoto předpokladu je pak definována k -tá mocnina matice A pomocí druhé z těchto rovností. Definice tohoto typu se nazývají *induktivní*.

**3.18 Příklad.**

Vypočtete A^3 , jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

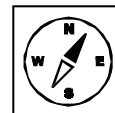


Řešení:

Podle definice přirozené mocniny matice platí

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 \cdot A = (A \cdot A) \cdot A = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Poslední maticovou operací, o níž se zmíníme v závěru tohoto odstavce, je tzv. *transponování matic*.

**3.19 Definice. Matice transponovaná.**

Je-li $A = (a_{ij})$ matice typu (m, n) , pak matice $A' = (a'_{ij})$ typu (n, m) taková, že pro každé místo $(i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m$ platí

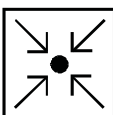
$$a'_{ij} = a_{ji},$$



se nazývá *matice transponovaná* k matici A .

Poznámky.

- (1) Je-li A libovolná matice typu (m, n) , pak matici A' k ní transponovanou lze vytvořit tak, že vezmeme po řadě jednotlivé řádky matice A a vytvoříme z nich sloupce matice A' .
- (2) Je-li matice A čtvercová, pak matici A' k ní transponovanou lze vytvořit i tak, že matici A „překlopíme“ podle hlavní diagonály.
- (3) Navíc je zřejmé, že matice A je symetrická, právě když $A = A'$, a je antisymetrická, právě když $A = -A'$.



3.20 Příklad.

K dané matici A určete matici transponovanou.

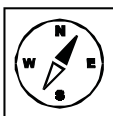
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Matici transponovanou A' k matici A dostaneme dle výše uvedeného návodu v poznámkách tak, že matici „překlopíme“ podle hlavní diagonály, tedy

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Základní vlastnosti transponování matic shrnuje následující tvrzení.



3.21 Věta.

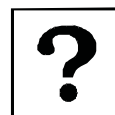
- (i) Pro každou matici $A \in \mathbf{T}_{m,n}$ platí $(A')' = A$.
- (ii) Pro každé dvě matice téhož typu $A, B \in \mathbf{T}_{m,n}$ platí $(A + B)' = A' + B'$.
- (iii) Pro každé $\alpha \in \mathbf{T}$ a každou matici $A \in \mathbf{T}_{m,n}$ platí $(\alpha A)' = \alpha A'$.
- (iv) Pro každé dvě matice $A \in \mathbf{T}_{m,n}$ a $B \in \mathbf{T}_{n,p}$ platí $(A \cdot B)' = B' \cdot A'$.



3.22 Pojmy k zapamatování.

Rovnost matic,
 součet matic,
 opačná matice,
 rozdíl matic,
 součin matic,
 transponovaná matice,
 záměnné matice,
 mocnina matice.

3.23 Kontrolní otázky.



Kdy jsou si dvě matice rovny?

Jakého typu musí být dvě matice, abychom mohli provést jejich součet?

Jaký je vztah mezi maticí a maticí k ní opačnou?

Co se stane s prvky matice A , vynásobíme-li ji skalárně prvkem α ?

Co musí platit pro typy matic, abychom mohli provést jejich součin?

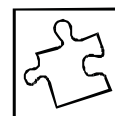
Co se stane s maticí vynásobíme-li ji zleva či zprava jednotkovou maticí?

Platí pro součet a součin matic komutativní zákon?

Platí pro součet a součin matic asociativní zákon?

Jaký je vztah mezi maticí A a maticí k ní transponovanou A' , jestliže matice A je symetrická resp. antisymetrická?

3.24 Neřešené úlohy.



1. Vypočtěte $A + B$, $A + 3B$, $A - B$, $3A - 2B$, jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Najděte X, Y , které pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

vyhovují vztahům

(a) $X + A = B$,

(b) $3A + 2Y = -B$.

3. Nechť A je matice typu $(4, 6)$. Určete typ matice tak, aby oba součiny AB i BA měly smysl.

4. Jsou dány matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Určete, které z následujících součinů jsou proveditelné a spočítejte je: $AB, BA, CA, BC, AA', CA', B'C, CC'$.

5. Vypočtěte AB a BA , jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Vypočtěte následující mocniny

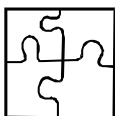
$$(a) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3,$$

$$(b) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^5.$$

7. Určete alespoň jednu matici B , která je záměnná s maticí A , jestliže

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$(b) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$



3.25 Výsledky neřešených úloh.

1. Řešení:

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 7 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A + 3B = \begin{pmatrix} 12 & -4 & 3 \\ 11 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$A - B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} -8 & -1 & 9 \\ 11 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Řešení:

$$(a) X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$(b) Y = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & -\frac{11}{2} \\ -\frac{15}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

3. Matice B musí být typu $(6, 4)$.

4. Neexistují součiny $AB, BA, CA', B'C$. Ostatní součiny existují a jejich řešení je následující:

$$CA = \begin{pmatrix} 15 & -30 & 51 \\ 8 & 18 & 34 \\ 3 & 28 & 17 \end{pmatrix}, \quad BC = \begin{pmatrix} 21 & 18 \\ 4 & 35 \end{pmatrix},$$

$$AA' = \begin{pmatrix} 26 & 8 \\ 8 & 62 \end{pmatrix}, \quad CC' = \begin{pmatrix} 153 & 51 & 0 \\ 51 & 34 & 17 \\ 0 & 17 & 17 \end{pmatrix}.$$

5. Řešení:

$$AB = \begin{pmatrix} -8 & 12 & 15 \\ 6 & -11 & -4 \\ -2 & 1 & 11 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -10 & 5 & 15 \\ 5 & -8 & -2 & 9 & 11 \\ -4 & 6 & 1 & -7 & -8 \\ -5 & -4 & -16 & -3 & -13 \\ 5 & -4 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Řešení:

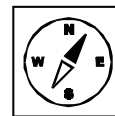
$$(a) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix},$$

$$(b) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 304 & -61 \\ 305 & -62 \end{pmatrix}.$$

7. Řešení je nekonečně mnoho, každé řešení snadno ověříte dosazením do rovnosti $AB = BA$.

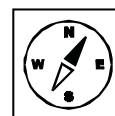
4 Determinant matice.

V tomto odstavci budeme uvažovat *pouze čtvercové matice s prvky z \mathbf{T}* a budeme zkoumat vlastnosti jistého speciálního zobrazení, které každé takové matici přiřadí jistý prvek z \mathbf{T} – tzv. *determinant* této matice. Po prostudování budete umět spočítat nejdříve determinanty matic druhého řádu, pak determinanty matic třetího řádu Sarrusovým pravidlem. V další části se naučíte počítat determinanty matic řádů vyšších než tři.



4.1 Klíčová slova.

determinant matice, Sarrusovo pravidlo, rozvoj determinantu, Laplaceova věta o rozvoji determinantu podle prvků jedné řady, minor, algebraický doplněk.



4.2 Definice. Determinant matice.

Nechť $A \in \mathbf{T}_{m,n}$ je libovolná matice řádu n . Pak jejím *determinantem* budeme nazývat prvek z \mathbf{T} , který označíme symbolem $|A|$, v některých případech také $\det A$, a definujeme jej takto:



- (i) Je-li $n = 1$ a $A = (a_{11})$, pak položíme $|A| = a_{11}$.
- (ii) Předpokládejme, že determinant $|A|$ je již definován pro všechny matice A nad \mathbf{T} řádu $< n$ a nechť $A \in \mathbf{T}_{n,n}$ je libovolná matice mající explicitní tabulkový tvar

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

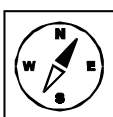
Pak položíme

$$|A| = a_{11} \cdot |A_{11}| - a_{12} \cdot |A_{12}| + \dots + (-1)^n \cdot a_{1n} |A_{1n}| = \sum_{j=1}^n (-1)^j \cdot a_{1j} \cdot |A_{1j}|,$$

kde $|A_{1j}|$ pro $j = 1, \dots, n$ jsou determinanty matic A_{1j} řádu $n - 1$, které vzniknou z matice A vypuštěním prvního řádku a j -tého sloupce.

Poznámka.

I v tomto případě, podobně jako v případě definice 3.13, jde zřejmě o *induktivní definici*. V části (i) je nejprve definován pojem determinantu pro matice řádu 1, v části (ii) se pak nejprve předpokládá, že determinant je již definován pro všechny čtvercové matice mající řád $< n$, a na základě tohoto *induktivního předpokladu* se pak příslušnou formulí definuje determinant libovolné matice řádu n . Tím je již pojem determinantu definován pro všechny matice z $\mathbf{T}_{n,n}$, kde $n \in \mathbb{N}$ je libovolné přirozené číslo.



Ve zbývajících částech tohoto odstavce odvodíme postupy pro výpočet determinantu matic řádů 2 a 3. Předpokládejme nejprve, že A je libovolná matice řádu 2, a necht

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Podle definice 4.2 pak platí

$$|A| = a_{11} \cdot |A_{11}| - a_{12} \cdot |A_{12}|, \quad (1)$$

přičemž

$$A_{11} = (a_{22}), \quad A_{12} = (a_{21}),$$

takže

$$|A_{11}| = a_{22}, \quad |A_{12}| = a_{21}.$$

Dosazením do výše uvedené rovnosti (1) pak dostaneme

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Tím jsme dokázali následující tvrzení:

4.3 Věta.

Je-li A libovolná matice řádu 2 nad \mathbf{T} , přičemž

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

pak platí

$$\boxed{|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}.$$

Poznámka.

Postup při výpočtu determinantu matice řádu 2 lze znázornit pomocí následujícího schématu, které udává, že součinu prvků na hlavní diagonále přiřadíme znaménko +, součinu prvků na vedlejší diagonále pak znaménko –:

$$|A| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Předpokládejme dále, že A je libovolná matice řádu 3, a nechtě

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Podle definice 4.2 pak platí

$$|A| = a_{11} \cdot |A_{11}| - a_{12} \cdot |A_{12}| + a_{13} \cdot |A_{13}|, \quad (2)$$

kde

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Užitím předchozího postupu pro výpočet determinantů matic řádu 2 dostaneme

$$|A_{11}| = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32},$$

$$|A_{12}| = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31},$$

$$|A_{13}| = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}.$$

a odtud dosazením do výše uvedené rovnosti (2) dostaneme

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Úpravou pravé strany této rovnosti dostaneme pak známé pravidlo pro výpočet determinantu matice řádu 3, za jehož původce bývá považován francouzský matematik Pierre Frédéric Sarrus (1798–1858).

4.4 Věta. (Sarrusovo pravidlo).

Je-li A libovolná matice řádu 3 nad \mathbf{T} , přičemž

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

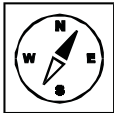
pak platí

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

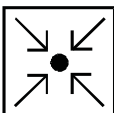
Poznámka.

I v tomto případě lze postup při výpočtu determinantu matice řádu 3 znázornit pomocí následujícího schématu, které je ovšem poněkud složitější, než v případě matic řádu 2.

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & & \\ \begin{array}{ccc} \swarrow & \searrow & \searrow \\ - & a_{11} & a_{12} & a_{13} & + \\ \swarrow & \swarrow & \swarrow \\ - & a_{21} & a_{22} & a_{23} & + \\ \swarrow & \swarrow & \swarrow \\ - & & & & + \end{array} & & \end{array}$$



K tabulkovému zápisu matice připojíme ještě její první dva řádky a pak součiny prvků ve směru hlavní diagonály opatříme znaménkem +, zatímco součiny prvků ve směru vedlejší diagonály pak znaménkem –.

**4.5 Příklad.**

Vypočítejte determinanty matic A a B , jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Užitím schématu pro výpočet determinantu matic řádu 2 dostaneme

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-3) \cdot 1 = 8 - (-3) = 11$$

A podobně užitím Sarrusova pravidla pro výpočet determinantu matic řádu 3,

dostaneme

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= 3 \cdot (-5) \cdot 1 + (-1) \cdot 3 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) \cdot 2 - 0 \cdot (-5) \cdot 2 \\ &\quad - 2 \cdot 3 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) \cdot (-1) \\ &= -15 + 0 - 8 - 0 - 18 - 2 = -43 \end{aligned}$$

Poznámka.

Pro výpočet determinantů matic řádu $n > 3$ už neexistuje žádné pravidlo obdobné Sarrusovu pravidlu pro determinanty matic řádu 3. A ani přímá aplikace formule obsažené v definici 4.2 nepřináší řádný prakticky použitelný postup. Zmíněná formule převádí totiž výpočet determinantu matice řádu n na výpočet n determinantů matic řádu $n - 1$, každý z nich pak vede k výpočtu $n - 1$ determinantů matic řádu $n - 2$ atd., až dojdeme k determinantům matic řádu 2, kterých je ovšem

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = n!$$

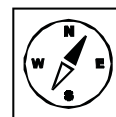
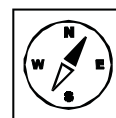
Je tedy zřejmé, že ani tady cesta k rozumně realizovatelné metodě výpočtu determinantů matic vyšších řádů nevede.

Abychom tento problém zvládli, musíme nejprve připomenout některé další důležité vlastnosti determinantů, které nám posléze umožní najít efektivní a praktický proveditelný postup jak vypočítat determinanty matic řádu $n > 3$.

4.6 Věta.

Nechť A je libovolná matice řádu n a A' matice k ní transponovaná. Pak platí

$$|A'| = |A|.$$



Poznámka.

Důsledkem právě uvedeného tvrzení je, že všechny vlastnosti determinantů vzhledem k jejich řádkům platí obdobně i pro jejich sloupce, a obráceně. V důsledku toho se pak někdy obě tvrzení pro řádky i sloupce formulují společně pro *řady* dané matice, čímž se rozumí souhrnně *řádky* i *sloupce*.

**4.7 Věta. (Laplaceova věta o rozvoji determinantu podle prvků jedné řady).**

Pro každou matici A řádu $n > 1$ a každé $r, s \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$|A| = (-1)^{r+1} \cdot a_{r1} \cdot |A_{r1}| + \dots + (-1)^{r+n} \cdot a_{rn} \cdot |A_{rn}| = \sum_{j=1}^n (-1)^{r+j} \cdot a_{rj} \cdot |A_{rj}|, \quad (3)$$

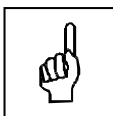
a podobně

$$|A| = (-1)^{1+s} \cdot a_{1s} \cdot |A_{1s}| + \dots + (-1)^{n+s} \cdot a_{ns} \cdot |A_{ns}| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+s} \cdot a_{is} \cdot |A_{is}|, \quad (4)$$

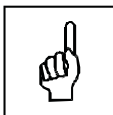
kde $|A_{ij}|$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$ jsou matice vzniklé z matice A vypuštěním všech prvků i -tého řádku a j -tého sloupce.

Poznámka.

Právě uvedenou vlastnost determinantů rozpoznal a poprvé dokázal francouzský matematik Pierre Simon Laplace (1749–1827) a odtud pak pochází název *Laplaceova věta*, pod níž je uvedené tvrzení velmi často uváděno v literatuře.

**4.8 Definice.**

Nechť A je libovolná matice řádu $n > 1$ a A_{ij} matice vzniklá z matice A vypuštěním všech prvků i -tého řádku a j -tého sloupce pro libovolně zvolená $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Pak



- (i) determinant $|A_{ij}|$ nazveme *subdeterminantem* nebo také *minorem* matice A příslušným k prvku a_{ij} ;
- (ii) součin $(-1)^{i+j} |A_{ij}|$ nazveme *algebraickým doplňkem* prvku a_{ij} a budeme jej stručněji označovat symbolem $\overline{A_{ij}}$;
- (iii) formule (3) resp. (4) z předchozího tvrzení nazveme *rozvojem determinantu $|A|$ podle prvků r -tého řádku resp. s -tého sloupce*.

Poznámky.

(1) Užijeme-li nyní pojmy zavedené předchozí definicí, pak je zřejmé, že rovnosti (3) resp. (4) obsažené ve formulaci Laplaceovy věty neříkají nic jiného, než že determinant matice A lze určit tak, že *každý prvek libovolného zvoleného řádku resp. sloupce násobíme jeho algebraickým doplňkem a všechny tyto součiny sečteme.*



(2) A navíc je také zřejmé, že rovnost obsažená v bodě (ii) definice determinantu 4.2 není z hlediska Laplaceovy věty nic jiného, než rozvoj determinantu $|A|$ podle prvků prvního řádku.

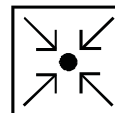
4.9 Věta.

Nahradíme-li v dané čtvercové matici A libovolný její řádek resp. sloupec jeho c -násobkem pro libovolně zvolené $c \in \mathbf{T}$, obdržíme matici B , pro jejíž determinant platí $|B| = c \cdot |A|$.

4.10 Příklad.

Nechť jsou dány matice A a B .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ c \cdot a_{31} & c \cdot a_{32} & c \cdot a_{33} \end{pmatrix}.$$

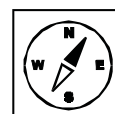


Platí tedy, že matici B jsme obdrželi tak, že jsme třetí řádek matice A nahradili jeho c -násobkem. Determinant matice B určíme rozvojem podle prvků třetího řádku

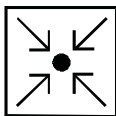
$$|B| = ca_{31}\overline{A_{31}} + ca_{32}\overline{A_{32}} + ca_{33}\overline{A_{33}} = c(a_{31}\overline{A_{31}} + a_{32}\overline{A_{32}} + a_{33}\overline{A_{33}}) = c|A|.$$

V tomto případě pro matici řádu 3 skutečně platí $|B| = c|A|$.

Jako důsledek právě uvedeného tvrzení vyplývají pak následující dvě vlastnosti determinantů.

**4.11 Věta.**

Má-li daná čtvercová matice A jeden řádek resp. jeden sloupec, jehož všechny prvky jsou nulové, pak $|A| = 0$.



4.12 Příklad.

Nechť máme danu matici

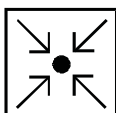
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinant určíme rozvojem podle prvků třetího sloupce.

$$|A| = 0 \cdot \overline{A_{13}} + 0 \cdot \overline{A_{23}} + 0 \cdot \overline{A_{33}} = 0.$$

4.13 Věta.

Je-li A libovolná matice řádu n a αA její α -násobek pro libovolně zvolené $\alpha \in \mathbf{T}$, pak $|\alpha \cdot A| = \alpha^n \cdot |A|$.



4.14 Příklad.

Příklad si opět ukážeme na matici 3. řádu.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

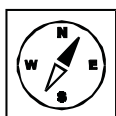
Určíme determinant $|\alpha A|$.

$$\begin{aligned} |\alpha A| &= \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} & \alpha a_{33} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} & \alpha a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \alpha^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} & \alpha a_{33} \end{vmatrix} = \alpha^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha^3 |A|. \end{aligned}$$

4.15 Věta.

Zaměníme-li v libovolné matici A řádu $n > 1$ dva její různé řádky resp. sloupce, obdržíme matici A , pro jejíž determinant platí $|B| = -|A|$.

Jako důsledek tohoto tvrzení vyplývá pak následující vlastnost determinantů.



4.16 Věta.

Má-li daná matice A řádu $n > 1$ alespoň dva stejné řádky resp. sloupce, pak $|A| = 0$.

4.17 Věta.

Je-li v dané matici A řádu $n > 1$ jeden její řádek resp. sloupec c -násobkem jiného jejího řádku resp. sloupce, pak $|A| = 0$.

4.18 Příklad.

Mám dānu matici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 8 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & 4 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

V matici A je čtvrtý sloupec dvojnásobkem druhého.

Nyní se pokusíme určit determinant matice A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 8 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & 4 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 8 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Zjistili jsme tedy, determinant matice A je roven dvojnásobku determinantu matice, jež má stejné dva sloupce (druhý a čtvrtý), tedy musí být roven 0.

4.19 Věta.

Má-li daná čtvercová matice A jeden řádek resp. jeden sloupec, jehož všechny prvky jsou tvořeny součty dvojic prvků z T , pak platí

$$|A| = |B| + |C|,$$

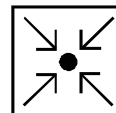
kde B a C jsou matice vzniklé z matice A tak, že v příslušném řádku resp. sloupci ponecháme pouze první popř. pouze druhý z obou sčítanců původního součtu.

4.20 Věta.

Je-li A matice řádu $n > 1$ a B matice vytvořenā z matice A tak, že ke každému prvku s -tého řádku resp. sloupce byl přičten c -násobek odpovídajícího prvku v r -tém řádku resp. sloupci, kde $r, s \in \{1, \dots, n\}, r \neq s$, pak $|B| = |A|$.

Poznámky.

- (1) Právě uvedené tvrzení je možno poněkud volněji formulovat takto: přičteme-li k libovolnému řádku resp. sloupci násobek jiného řádku resp. sloupce, pak se determinant matice nezmění.



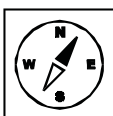
(2) Toto pravidlo lze pak dále zobecnit jedním z následujících způsobů:

- jestliže prvky všech řádků dané matice s výjimkou r -tého násobíme po řadě prvky $c_1, \dots, c_{r-1}, c_{r+1}, \dots, c_n$ a takto vytvořené násobky řádků přičteme k odpovídajícím prvkům r -tého řádku, pak se determinant matice nezmění,
- jestliže podobně prvky všech sloupců dané matice s výjimkou s -tého sloupce násobíme po řadě prvky $c_1, \dots, c_{s-1}, c_{s+1}, \dots, c_n$ a takto vytvořené násobky přičteme k odpovídajícím prvkům s -tého sloupce, pak se determinant matice nezmění.

(3) Oba právě popsané postupy charakterizujeme obvykle stručnějším formulací: *k prvkům r -tého řádku resp. s -tého sloupce jsme přičetli lineární kombinaci ostatních řádků resp. sloupců s koeficienty $c_1, \dots, c_{r-1}, c_{r+1}, \dots, c_n$ resp. $c_1, \dots, c_{s-1}, c_{s+1}, \dots, c_n$.*

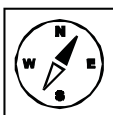
(4) Shrnutím poznatků (1)–(3) snadno dospějeme k tomuto poznatku: *přičteme-li k libovolnému řádku resp. sloupci dané čtvercové matice libovolnou lineární kombinaci ostatních řádků resp. sloupců, pak získáme matici, jejíž determinant je roven determinantu výchozí matice.*

Jako důsledek pak vyplývá následující důležitá vlastnost determinantů.



4.21 Věta.

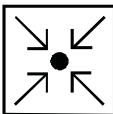
Je-li v dané čtvercové matici A některý její řádek resp. sloupec lineární kombinací ostatních řádků resp. sloupců, pak $|A| = 0$.



V závěru tohoto odstavce si ukážeme, jak se uvedených vlastností dá použít při výpočtu determinantů matic vyšších řádů. Postup ukážeme na příkladě.

4.22 Příklad.

Vypočtěte determinant matice



$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Výpočet zahájíme tím, že matici A upravíme pomocí pravidla o přičítání lineární kombinace řádků resp. sloupců tak, aby vznikla matice obsahující řádek resp. sloupec, jehož všechny prvky s výjimkou jednoho jsou nulové. Výhodou při této operaci je okolnost, jsou-li v matici obsaženy prvky -1 resp. 1 .

V našem případě to lze provést kupř. tak, že beze změny ponecháme třetí řádek matice a ten pak násobíme -2 a přičteme k prvnímu řádku, poté jej násobíme -4 a přičteme ke druhému řádku a nakonec jej násobíme -3 a přičteme jej ke čtvrtému řádku. Dostaneme

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -7 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Nyní aplikujeme Laplaceovu větu a provedeme rozvoj získaného determinantu podle prvků prvního sloupce. Vzhledem k tomu, že tři prvky v tomto sloupci jsou rovny nule, bude mít příslušný rozvoj pouze jeden člen, čímž se determinant matice A řádu 4 převede na výpočet determinantu matice řádu 3.

$$|A| = (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 2 & 3 \\ -10 & -1 & 6 \\ -7 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 2 & 3 \\ -10 & -1 & 6 \\ -7 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

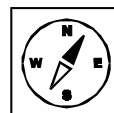
Teď už bychom sice mohli pokračovat pomocí Sarrusova pravidla, většinou se však použije opět úprava s následujícím Laplaceovým rozvojem, což bývá rychlejší a efektivnější. V našem případě ponecháme kupř. třetí řádek, násobíme jej -2 a přičteme k prvnímu řádku a pak jej ještě přičteme ke druhému řádku. Následnou aplikací Laplaceovy věty pak dostaneme

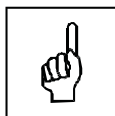
$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 0 & -9 \\ -17 & 0 & 12 \\ -7 & 1 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -9 \\ -17 & 12 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 7 & -9 \\ -17 & 12 \end{vmatrix}.$$

Odtud pak použitím pravidla pro výpočet determinantu matice druhého řádu dostaneme

$$|A| = - [7 \cdot 12 - (-9) \cdot (-17)] = -(-69) = 69.$$

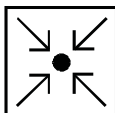
Připojíme ještě definici jednoho dalšího důležitého pojmu, který budeme potřebovat v dalším výkladu.





4.23 Definice. Regulární matice.

Čtvercová matice A se nazývá *regulární*, jestliže $|A| \neq 0$. V opačném případě, tj. jestliže $|A| = 0$, se nazývá *singulární*.



4.24 Příklad.

Určete, zda matice A je regulární, jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Abychom zjistili, zda daná matice je regulární, spočteme její determinant.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 3 + 3 - 2 - 9 - 6 = 1.$$

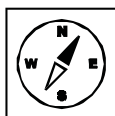
Jelikož determinant je roven jedné, je tedy nenulový a matice A je tudíž regulární.



V následujícím tvrzení si vysvětlíme, jak je to s determinantom součinu dvou matic.

4.25 Věta.

Jsou-li A, B matice téhož řádu n , platí $|AB| = |A||B|$.



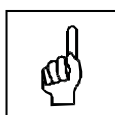
Ve zbývajících částech se budeme zabývat inverzními maticemi a jejich vlastnostmi. Než se dostaneme přímo k definici inverzní matice, vyslovíme následující tvrzení.

4.26 Věta.

Ke každé matici A řádu n existuje nejvýše jedna matice X téhož řádu taková, že platí $AX = XA = E$, kde E je jednotková matice řádu n .

4.27 Definice. Inverzní matice.

Nechť A je čtvercová matice řádu n , E je jednotková matice téhož řádu. Existuje-li matice X taková, že platí $AX = XA = E$, pak řekneme, že matice X je *inverzní matice k matici* A a píšeme $X = A^{-1}$. Matice A , k níž existuje inverzní matice A^{-1} , se nazývá *invertibilní*.

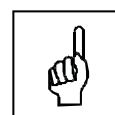


Poznámka.

Definice následujícího pojmu je nezbytná k tomu, abychom inverzní matici A^{-1} mohli explicitně popsat pomocí prvků matice A .

4.28 Definice. Adjungovaná matice.

Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n . Pak matici \bar{A} , kterou vytvoříme tak, že každý prvek matice A nahradíme jeho algebraickým doplňkem a takto získanou matici transponujeme, budeme nazývat *maticí adjungovanou k matici* A .

**4.29 Věta.**

Je-li A regulární matice řádu n , pak

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \bar{A}.$$

4.30 Věta.

Matice A řádu n je invertibilní právě tehdy, je-li regulární.

Na závěr se podíváme na pár vlastností inverzních matic.

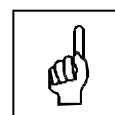
4.31 Věta.

Pro každé dvě regulární matice A, B téhož řádu n platí:

- (i) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
- (ii) $(A^{-1})^{-1} = A$;
- (iii) $(A')^{-1} = (A^{-1})'$;
- (iv) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.č

4.32 Pojmy k zapamatování.

Determinant matice,
Sarrusovo pravidlo,
rozvoj determinantu,
subdeterminant, minor,
algebraický doplněk prvku a_{ij} .





4.33 Kontrolní otázky.

Pro jaké matice užíváme k výpočtu determinantu Sarrusovo pravidlo?

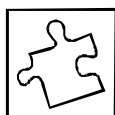
Vysvětlete princip výpočtu determinantu matice Sarrusovým pravidlem?

Jak vypadá rozvoj determinantu podle prvků r -tého řádku?

Jaký je vztah mezi determinanty matic A a B , pro které platí $B = \alpha A$?

Co se stane s determinantem matice, v níž zaměníme dva sloupce?

Jaký je determinant matice, je-li jeden její řádek lineární kombinací ostatní řádků?



4.34 Neřešené úlohy.

1. Spočtěte determinanty:

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix},$$

$$(b) \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix},$$

$$(c) \begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix},$$

$$(d) \begin{vmatrix} \frac{1+t^2}{1-t^2} & \frac{2t}{1-t^2} \\ \frac{2t}{1-t^2} & \frac{1+t^2}{1-t^2} \end{vmatrix}, \text{ kde } t \neq \pm 1.$$

2. Spočtěte determinanty:

$$(a) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$(b) \begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 6 \end{vmatrix},$$

$$(c) \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix},$$

$$(d) \begin{vmatrix} -5 & 3 & 9 \\ -9 & -2 & -1 \\ 6 & -6 & -8 \end{vmatrix}.$$

3. Spočtěte determinanty:

$$(a) \begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix},$$

$$(b) \begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$(c) \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{6} & \sqrt{10} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{vmatrix},$$

$$(d) \begin{vmatrix} \sin x & 1 & 1 \\ \cos x & 1 & 1 \\ 1 & \cos x & \sin x \end{vmatrix},$$

$$(e) \begin{vmatrix} 3i & i & 1-i \\ 1+i & 0 & 1 \\ -i & i & 2i \end{vmatrix}.$$

4. Řešte rovnice:

$$(a) \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 2 & x & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(b) \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 2 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0,$$

$$(c) \begin{vmatrix} x & x+1 & x-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

5. Spočítejte determinanty matic vyšších řádů:

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -8 & 3 \\ 0 & -2 & 8 & -1 \\ 4 & -7 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$(b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix},$$

$$(c) \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 8 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix},$$

$$(d) \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 6 & 1 \\ 5 & 13 & 1 & 12 & 7 \\ 2 & 6 & 3 & 8 & 1 \\ -4 & 9 & 5 & 10 & 8 \end{vmatrix},$$

$$(e) \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix},$$

$$(f) \begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 9 \\ 0 & b & 0 & 12 \\ 7 & 8 & c & -3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}.$$

6. Zjistěte, které z daných matic jsou regulární.

$$(a) A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$(b) B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(c) C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 7 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. K matici A urči adjungovanou matici:

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$(b) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$(c) A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}.$$

8. Určete, v kterých případech a)–c) předchozího příkladu je matice invertibilní a v kladném případě určete inverzní matici.

9. Určete inverzní matici A^{-1} k matici A , jestliže

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(b) A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Řešte maticovou rovnici $AX = B$, jestliže

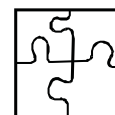
$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$(b) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

11. Vypočtete $(AB)^{-1}$, jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 6 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 9 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.35 Výsledky neřešených úloh.



1. (a) -2 , (b) 0 , (c) 1 , (d) 1 .

2. (a) 2 , (b) 90 , (c) 100 , (d) 310 .

3. (a) $2a^2(a+x)$, (b) -2 , (c) $5 - 2\sqrt{10}$, (d) $1 - \sin 2x$, (e) $6 + 4i$.

4. (a) $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{5}{2}$, (b) $x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2, x_1 = -1, x_{2,3} = 1$,
(c) nemá řešení.

5. (a) 0 , (b) -60 , (c) -282 , (d) -64 , (e) $x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2$, (f) $abcd$.

6. (a) $|A| = 4$, A je regulární, (b) $|B| = 46$, B je regulární, (c) $|C| = 0$,
 C není regulární.

$$7. (a) \bar{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(b) \bar{A} = \begin{pmatrix} 13 & 2 & -8 \\ 13 & 2 & -8 \\ -13 & -2 & 8 \end{pmatrix},$$

$$(c) \bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$8. (a) |A| = 1, A^{-1} = \bar{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

(b) $|A| = 0$, není invertibilní,

(c) $|A| = 0$, není invertibilní.

9. (a) $A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix},$

(b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}.$

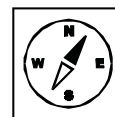
10. (a) $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$

(b) $X = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$

11. $AB = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 7 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 22 & 8 & -5 \\ 5 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

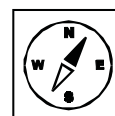
5 Aritmetický vektorový prostor.

V této kapitole se budeme věnovat základním poznatkům o vektorových prostorech potřebných pro další výklad. Na konci této kapitoly budete umět definovat aritmetický vektorový prostor, pracovat s vektory jako provádět součet vektorů, skalární násobek vektoru, budete umět určit vektor jako lineární kombinaci daných vektorů, poznáte, kdy jsou vektory lineárně závislé. Seznámíte se s pojmem podprostoru vektorového prostoru, budete dále umět určit bázi podprostoru a dimenzi vektorového prostoru.



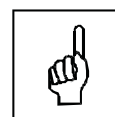
5.1 Klíčová slova.

vektorový prostor, nulový vektor, součet vektorů, opačný vektor, podprostor, triviální podprostor, báze podprostoru, dimenze vektorového prostoru.



5.2 Definice. Aritmetický vektorový prostor.

Nechť $n \in \mathbb{N}$ je libovolně zvolené přirozené číslo. Pak každou uspořádanou n -tici prvků z \mathbf{T} tvaru $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ budeme nazývat *n -členným aritmetickým vektorem* nad \mathbf{T} a prvky $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{T}$ budeme nazývat jeho *složkami*. Množinu všech n -členných aritmetických vektorů nad \mathbf{T} budeme označovat symbolem V_n a budeme ji nazývat *aritmetickým vektorovým prostorem* nad \mathbf{T} .



Poznámka.

Vzhledem k tomu, že o jiných než aritmetických vektorech nad \mathbf{T} zde nebude řeč, budeme adjektivum „aritmetický“ často vypouštět a budeme často hovořit pouze o vektorech nad \mathbf{T} .

5.3 Definice. Nulový vektor.

Vektor prostoru V_n , jehož všechny složky jsou nulové, budeme nazývat *nulový vektor* a budeme jej značit symbolem $\vec{0}$. Libovolný vektor z V_n , který není nulový, se pak bude nazývat *nenulový vektor*.

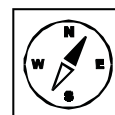


5.4 Definice. Součet vektorů.

Nechť $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ jsou libovolné vektory prostoru V_n . Pak jejich *součtem* budeme rozumět vektor $\vec{a} + \vec{b}$ definovaný vztahem

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n).$$

Vlastnosti operace sčítání vektorů shrnuje následující tvrzení.



5.5 Věta.

Sčítání aritmetických vektorů se řídí následujícími pravidly:

(i) Jsou-li $\vec{a}, \vec{b} \in V_n$ libovolné vektory, pak

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

(ii) Jsou-li $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_n$ libovolné vektory, pak

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

(iii) Je-li $\vec{a} \in V_n$ libovolný vektor a $\vec{0} \in V_n$ nulový vektor, pak

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}.$$

(iv) Je-li $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in V_n$ libovolný vektor a $-\vec{a} \in V_n$ vektor definovaný vztahem $-\vec{a} = (-a_1, \dots, -a_n)$, pak

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}.$$

5.6 Definice. Opačný vektor.

Je-li $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in V_n$ libovolný vektor, pak vektor $-\vec{a} = (-a_1, \dots, -a_n)$ nazveme *opačným vektorem* k vektoru \vec{a} .

Poznámka.

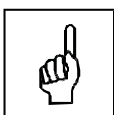
Podobně jako v případě sčítání matic i zde jsou výše uvedené vlastnosti (i)–(iv) důsledky známých vlastností operace sčítání reálných resp. komplexních čísel.

A i v tomto případě se zpravidla uvádějí pod názvem „zákonů“. Takže tvrzení (i) se pak obvykle nazývá *komutativní zákon*, tvrzení (ii) pak *asociativní zákon pro sčítání vektorů*. Tvrzení (iii) je opět *podmínka existence neutrálního prvku*, který je v tomto případě nulový vektor $\vec{0}$, tvrzení (iv) je *podmínka existence opačného prvku*, a tím je zřejmé vektor opačný k danému vektoru.

5.7 Definice. Skalární násobek.

Pro každý vektor $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in V_n$ a pro každý prvek $\alpha \in \mathbf{T}$ definujme *skalární násobek* resp. α -*násobek* vektoru \vec{a} jako vektor

$$\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n).$$



Poznámka.

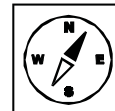
Na rozdíl od operace sčítání vektorů, jde v případě násobení skalárem opět o vnější operaci na množině V_n , neboť levý operand α je číslo z \mathbf{T} , zatímco pravý operand \vec{a} je aritmetický vektor z V_n .

Vlastnosti operace násobení vektoru skalárem shrnuje následující tvrzení.

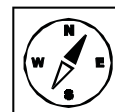
5.8 Věta.

Pro libovolné vektory $\vec{a}, \vec{b} \in V_n$ a libovolné prvky $\alpha, \beta \in \mathbf{T}$ platí:

- (i) $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$,
- (ii) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$,
- (iii) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$,
- (iv) $1\vec{a} = \vec{a}$.



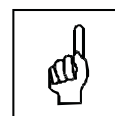
Dále se budeme zabývat lineárními kombinacemi vektorů a lineární nezávislostí či závislostí vektorů.

**5.9 Definice. Lineární kombinace vektorů.**

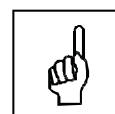
Budiž $n \in \mathbb{N}$ libovolné přirozené číslo, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{T}$ skaláry a $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V_n$ vektory. Pak vektor $\vec{b} \in V_n$ definovaný vztahem

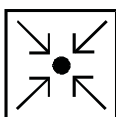
$$\vec{b} = \alpha_1\vec{a}_1 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i\vec{a}_i,$$

nazveme *lineární kombinací vektorů* $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ s *koefficienty* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Jsou-li přitom všechny koefficienty $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nulové, tj. platí-li $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, nazývá se daná lineární kombinace *triviální*. V opačném případě, tj. je-li alespoň jeden z koefficientů $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nenulový, hovoříme o *netriviální lineární kombinaci vektorů*.

**5.10 Definice. Lineární závislost vektorů.**

Vektory $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V_n$ se nazývají *lineárně závislé*, jestliže existuje alespoň jedna jejich netriviální lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru $\vec{0}$. V opačném případě, tj. je-li každá netriviální lineární kombinace uvažovaných vektorů vždy nenulovým vektorem, se tyto vektory nazývají *lineárně nezávislé*.





5.11 Příklad.

Zjistěte, zda vektory $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{v} = (3, 1, -4)$, $\vec{w} = (3, -4, -11)$ v aritmetickém vektorovém prostoru nad tělesem reálných čísel jsou lineárně závislé či nezávislé.

Řešení:

Pokud by vektory \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} byly lineárně závislé, pak existují reálná čísla α_1 , α_2 , α_3 taková, že

$$\alpha_1 \vec{u} + \alpha_2 \vec{v} + \alpha_3 \vec{w} = \vec{0}.$$

Dosazením za vektory dostáváme.

$$(1\alpha_1, 2\alpha_1, 1\alpha_1) + (3\alpha_2, 1\alpha_2, -4\alpha_2) + (3\alpha_3, -4\alpha_3, -11\alpha_3) = (0, 0, 0).$$

Po úpravě

$$(1\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3, 2\alpha_1 + 1\alpha_2 - 4\alpha_3, 1\alpha_1 - 4\alpha_2 - 11\alpha_3) = (0, 0, 0).$$

Aby byly vektory na levé a pravé straně rovnosti stejné, musí se rovnat odpovídající složky. Dostáváme, tedy rovnice

$$1\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$$

$$2\alpha_1 + 1\alpha_2 - 4\alpha_3 = 0$$

$$1\alpha_1 - 4\alpha_2 - 11\alpha_3 = 0$$

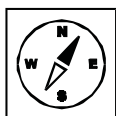
Vyřešením této soustavy rovnic zjistíme, že jedno z řešení je $\alpha_1 = -3$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 1$, tedy existuje netriviální lineární kombinace vektorů \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} rovná nulovému vektoru a tudíž dané vektory jsou lineárně závislé.

Oba právě zavedené pojmy, tj. pojem lineární kombinace a pojem lineární závislosti vektorů spolu velice úzce souvisí, jak vyplývá nejen z definice 5.10, ale také z následujícího tvrzení.

5.12 Věta.

Vektory $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V_n$, kde $n > 1$, jsou lineárně závislé, právě když alespoň jeden z nich je lineární kombinací zbývajících vektorů.

Nyní se seznámíme s dalšími pojmy jako podprostor vektorového prostoru, podprostor generovaný množinou vektorů vektorového prostoru, báze podprostoru a dimenze vektorového prostoru.



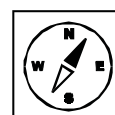
5.13 Definice. Podprostor vektorového prostoru V_n .

Neprázdnou množinu W vektorů prostoru V_n budeme nazývat *podprostorem* tohoto prostoru právě tehdy, splňuje-li následující podmínky:

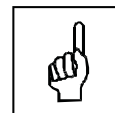


- (i) Jsou-li $\vec{a}, \vec{b} \in W$ libovolné dva vektory, pak také $\vec{a} + \vec{b} \in W$.
- (ii) Je-li $\alpha \in \mathbf{T}$ libovolný skalár a $\vec{a} \in W$ libovolný vektor, pak $\alpha\vec{a} \in W$.

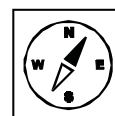
Je zřejmé, že zejména celý vektorový prostor V_n je podprostorem sebe sama a také množina $\{\vec{0}\}$ obsahující nulový vektor prostoru V_n je podprostorem tohoto prostoru.

**5.14 Definice. Triviální podprostor.**

Podprostor $\vec{0}$ vektorového prostoru V_n vytvořený jeho nulovým vektorem se nazývá *triviální podprostor* tohoto prostoru, každý jiný vektorový podprostor se pak nazývá *netriviální*.



Následující tvrzení popisuje algoritmus pro tvorbu netriviálních podprostorů prostoru V_n .

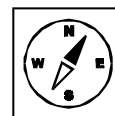
**5.15 Věta.**

Nechť $M = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r\}$ je množina vektorů z V_n . Pak množina $\langle M \rangle$ všech vektorů z V_n , které jsou lineárními kombinacemi vektorů náležejících do M , je podprostor vektorového prostoru V_n .

5.16 Definice. Podprostor generovaný množinou vektorů vektorového prostoru.

Podprostor $\langle M \rangle$ prostoru V_n , který popisuje předchozí tvrzení, se nazývá *podprostorem prostoru V_n generovaným množinou vektorů M* . Vektory náležející množině M se pak nazývají *generátory podprostoru $\langle M \rangle$* a v případě, že $\langle M \rangle = V_n$, hovoříme pak o *generátorech prostoru V_n* .

Největší význam mají zejména ty množiny generátorů, jejichž všechny vektory jsou lineárně nezávislé. Podrobněji to popisuje následující definice.

**5.17 Definice. Báze podprostoru.**

Nechť W je libovolný netriviální podprostor prostoru V_n . Pak množinu $M = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r\}$ vektorů z W nazveme *bází podprostoru W* , jestliže jsou splněny



tyto podmínky:

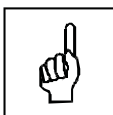
- (i) $\langle M \rangle = W$, tj. M je soustava generátorů podprostoru W .
- (ii) Vektory $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r$ jsou lineárně nezávislé.



Jestliže $W = V_n$, pak množinu M nazveme *bází prostoru* V_n .

5.18 Věta.

Všechny báze libovolného netriviálního podprostoru W vektorového prostoru V_n mají též počet vektorů.



5.19 Definice. Dimenze vektorového prostoru.

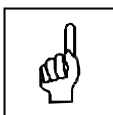
Dimenzí libovolného netriviálního podprostoru W vektorového prostoru V_n nazveme počet vektorů libovolné jeho báze. Je-li $W = V_n$, pak hovoříme o *dimenzi vektorového prostoru* V_n .

Poznámka.

Povšimneme si na závěr toho, jak vypadá dimenze aritmetického vektorového prostoru V_n . Je vcelku zřejmé, že vektory

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= (1, 0, \dots, 0), \\ \vec{e}_2 &= (0, 1, \dots, 0), \\ &\vdots \\ \vec{e}_n &= (0, 0, \dots, 1) \end{aligned}$$

jsou lineárně nezávislé, přičemž každý aritmetický vektor z V_n lze vyjádřit jako lineární kombinace těchto vektorů. Jinými slovy řečeno, uvedené vektory tvoří bázi prostoru V_n , takže dimenze tohoto prostoru musí být rovna číslu n .



5.20 Pojmy k zapamatování.

Aritmetický vektorový prostor,
 součet vektorů,
 skalární násobek vektoru,
 lineární kombinace vektorů,
 lineární závislost vektorů,
 podprostor vektorového prostoru,

báze podprostoru,
dimenze prostoru.

5.21 Kontrolní otázky.

Jak je definován aritmetický vektorový prostor?

Jak vypadá nulový vektor?

Jakým způsobem sčítáme vektory?

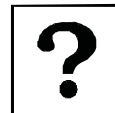
Jaký je vztah mezi složkami opačných vektorů?

Kdy jsou dané vektory lineárně závislé?

Co je to triviální podprostor?

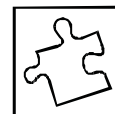
Co platí pro vektory různých bází jednoho netriviálního podprostoru vektorového prostoru?

Jaký je vztah mezi dimenzí a bází podprostoru vektorového prostoru?



5.22 Neřešené úlohy.

Zjistěte, zda dané vektory nad tělesem reálných čísel jsou lineárně závislé či nezávislé.



1. $\vec{a} = (1, 2, 3, 5)$, $\vec{b} = (-1, 0, 3, 0)$, $\vec{c} = (1, 1, -4, 1)$, $\vec{d} = (0, 2, -3, -2)$,

2. $\vec{x} = (-3, 1, 4)$, $\vec{y} = (1, 1, 1)$, $\vec{z} = (0, 0, 1)$,

3. $\vec{k} = (1, 3, 1)$, $\vec{l} = (0, 1, 2)$, $\vec{m} = (3, 7, -1)$,

4. $\vec{p} = (1, 5, 1, 2, -4)$, $\vec{q} = (2, -4, -1, 3, 1)$, $\vec{r} = (-1, 0, 0, 2, 0)$,

$\vec{s} = (0, 3, -2, 0, 1)$.

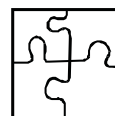
5.23 Výsledky neřešených úloh.

1. lineárně nezávislé,

2. lineárně nezávislé,

3. lineárně závislé,

4. lineárně nezávislé.



- (2) Soustavu (5) lze vyjádřit stručněji a přehledněji, použijeme-li prostředky teorie matic, s nimiž jsme se seznámili v předchozích odstavcích. Položíme-li

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (8)$$

pak je ihned zřejmé, že namísto (5) můžeme danou soustavu zapsat ve tvaru

$$A \cdot X = B. \quad (9)$$

6.3 Definice. Maticový zápis soustavy rovnic.

Rovnost (9), kde A, B, X jsou matice definované vztahy (6)–(8), se nazývá *maticovým zápisem* soustavy lineárních rovnic (5). Matice A se nazývá *maticí* této soustavy, matice B se nazývá *sloupcem pravých stran* nebo také *maticí pravých stran* a matice X pak *sloupcem neznámých* této soustavy. A konečně, matici A^* definovanou vztahem

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{pmatrix} \quad (10)$$

nazveme *rozšířenou maticí* soustavy (5).

6.4 Příklad.

Je dána soustava lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 &= 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 &= -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Matice soustavy A má pak tvar

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -5 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sloupec pravých stran je

$$B = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sloupec neznámých této soustavy je roven

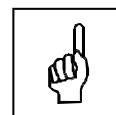
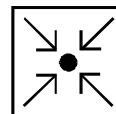
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

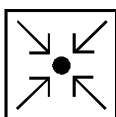
A matice soustavy rozšířená A^* má tedy tvar

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 2 & \vdots & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -5 & \vdots & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}.$$

6.5 Definice. Homogenní a nehomogenní soustava rovnic.

Soustava lineárních rovnic se nazývá *homogenní*, jestliže matice pravých stran B je nulová, tj. jsou-li všechny její prvky rovny nule. V opačném případě se soustava nazývá *nehomogenní*.





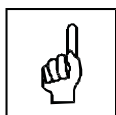
6.6 Příklad.

Příklad homogenní soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\-x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= 0\end{aligned}$$

Příklad nehomogenní soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}3x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1 \\x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 2 \\-2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= -3 \\-x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 2\end{aligned}$$



6.7 Pojmy k zapamatování.

Soustava lineárních rovnic,
matice soustavy a rozšířená matice soustavy,
sloupec pravých stran,
sloupec neznámých,
homogenní soustava a nehomogenní soustava.



6.8 Kontrolní otázky.

Máme-li soustavu m rovnic o n neznámých, jakého typu bude matice soustavy?

Kolik řešení má soustava lineárních rovnic řešitelná, kolik jich má jednoznačně řešitelná a kolik víceznačně řešitelná?

Kdy je daná soustava lineárních rovnic nehomogenní a kdy je homogenní?

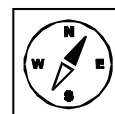
7 Cramerovské soustavy.

V tomto odstavci se budeme zabývat problémem řešitelnosti jedné speciální třídy soustav lineárních rovnic. Tyto soustavy odvozují svůj název od jména švýcarského matematika Gabriel Cramera (1704–1752), jednoho ze zakladatelů teorie determinantů. Po prostudování budete umět rozhodnout, zda daná soustava je cramerovská, budete umět vyjádřit kořeny cramerovské soustavy lineárních rovnic.



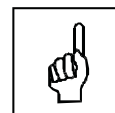
7.1 Klíčová slova.

cramerovská soustava, Cramerovo pravidlo, kořeny soustavy rovnic.



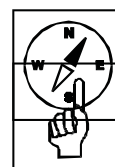
7.2 Definice. Cramerovská soustava lineárních rovnic.

Soustava lineárních rovnic (5) z předešlého odstavce se nazývá *cramerovská*, splňuje-li následující dvě podmínky:



- (i) $m = n$, tj. počet rovnic je roven počtu neznámých.
- (ii) Matice soustavy A je regulární, tj. platí $|A| \neq 0$.

Každá cramerovská soustava je vždy řešitelná, a to dokonce jednoznačně. Vyplyvá to z následujícího tvrzení, které se v literatuře uvádí zpravidla pod názvem *Cramerovo pravidlo*.



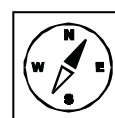
7.3 Věta. (Cramerovo pravidlo).

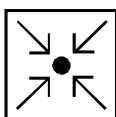
Každá cramerovská soustava lineárních rovnic tvaru $AX = B$ s maticí soustavy řádu n má právě jedno řešení $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in V_n$, jehož složky lze vyjádřit ve tvaru

$$\xi_j = \frac{|A_j|}{|A|}, j = 1, \dots, n, \quad (11)$$

kde $|A|$ je determinant matice dané soustavy a $|A_j|$ pro $j = 1, \dots, n$ jsou determinanty matic A_j , které vzniknou z matice A nahrazením j -tého jejího sloupce sloupcem pravých stran.

Postup při řešení cramerovské soustavy rovnic je zřejmý z následující úlohy.





7.4 Příklad.

Řešte soustavu rovnic

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = -1$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4$$

$$4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2$$

Řešení:

Vizuálně se snadno ověří, že daná soustava splňuje podmínku (i) výše uvedené definice, neboť $m = n = 3$. Abychom ji mohli prohlásit za cramerovskou, musíme nejprve vypočítat determinant její matice soustavy A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 4 + 4 - (-8 + 2 + 8) = 6.$$

Soustava tedy splňuje i podmínku (ii) zmíněné definice, neboť $|A| = 6 \neq 0$, a je tedy cramerovská. Z předchozího tvrzení pak vyplývá, že má jediné řešení $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in V_3$, kde

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{|A_1|}{|A|}, \\ \xi_2 &= \frac{|A_2|}{|A|}, \\ \xi_3 &= \frac{|A_3|}{|A|}. \end{aligned} \tag{12}$$

Abychom tato řešení mohli určit, musíme vypočítat ještě determinanty dalších tří matic A_1 , A_2 a A_3 . Matice A_1 podle návodu obsaženému v tvrzení 7.3 vznikne z matice soustavy A , nahradíme-li pevní její sloupec sloupcem pravých stran, takže pak

$$|A_1| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6.$$

Analogicky náhradou druhého sloupce matice A sloupcem pravých stran dostaneme matici A_2 , a tedy

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 12.$$

A konečně náhradou třetího sloupce matice A sloupcem pravých stran dostaneme matici A_3 a odtud je pak již zřejmé, že

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -12.$$

Dosazení do vzorců (12) pak dostaneme

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{6}{6} = 1, \\ \xi_2 &= \frac{12}{6} = 2, \\ \xi_3 &= \frac{-12}{6} = -2. \end{aligned}$$

Daná soustava má tedy jediné řešení tvaru $(1, 2, -2)$.

Poznámky.

- (1) Pro numerické řešení cramerovských soustav o větším počtu neznámých není výpočet pomocí Cramerova pravidla příliš efektivní a používá se zpravidla jiného postupu, o němž se zmíníme v následujících odstavcích. Cramerovo pravidlo má však bezesporu značný teoretický význam.
- (2) V souvislosti s aplikací Cramerova pravidla je ještě nezbytné uvážit, že pokud počet rovnic uvažované soustavy je roven počtu neznámých, ale determinant matice této soustavy je nulový, pak je Cramerovo pravidlo nepoužitelné. V žádném případě nelze bez dalšího vyšetřování prohlásit, že tato soustava nemá řešení!

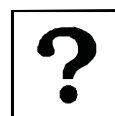
7.5 Pojmy k zapamatování.

Cramerovská soustava,
Cramerovo pravidlo,
kořen cramerovské soustavy.



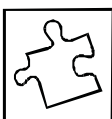
7.6 Kontrolní otázky.

Jaký je vztah mezi počtem rovnic a počtem neznámých v cramerovské soustavě lineárních rovnic?



Jaký musí být determinant matice cramerovské soustavy lineárních rovnic?

Jak vyjádříme kořeny cramerovské soustavy lineárních rovnic?



7.7 Neřešené úlohy.

Pomocí Cramerova pravidla řešte následující soustavy rovnic.

1.

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = -1$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4$$

$$4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2$$

2.

$$2x_1 + x_2 - 5x_3 = 1$$

$$-3x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

$$5x_1 - 6x_3 = 2$$

3.

$$x + y = 13$$

$$x - z = 5$$

$$y - z = 2$$

4.

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12$$

$$3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0$$

$$5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4$$

$$7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 16$$

5.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2$$

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2$$

$$x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2$$

6.

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -2$$

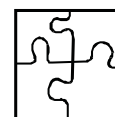
$$x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = -3$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 10$$

$$x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -5$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 1$$

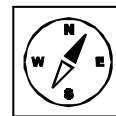
7.8 Výsledky neřešených úloh.



1. $[1, 2, -2]$,
2. $|A| = 0$, nelze použít Cramerovo pravidlo,
3. $[8, 5, 3]$,
4. $[1, -1, 0, 2]$,
5. $[1, -1, 1, -1, 1]$,
6. $|A| = 0$, nelze použít Cramerovo pravidlo.

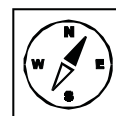
8 Hodnost matice a její výpočet.

Abychom mohli problém řešitelnosti vyřešit obecně pro všechny soustavy lineárních rovnic připadajících v úvahu, musíme rozšířit naše dosavadní poznatky. To učiníme v tomto odstavci, kde zavedeme jistou číselnou charakteristiku libovolné matice, kterou nazveme její *hodností*. Po prostudování této části budete vědět, co je to podmatice, jak určit hodnost matice. Dále budete umět převést matici pomocí elementárních úprav na stupňový (Gaussův) tvar, z kterého již jednoduše určíte hodnost matice. Budete znát tři způsoby chápání hodnosti matice.



8.1 Klíčová slova.

hodnost matice, regulární podmatice, elementární úpravy matice, Gaussův tvar.



8.2 Definice. Podmatice matice.

Nechť $A = (a_{ij})$ je libovolná matice typu (m, n) nad \mathbf{T} a nechť $i_1, \dots, i_p \in \mathbb{N}_m$, $j_1, \dots, j_q \in \mathbb{N}_n$, přičemž $p \leq m$, $q \leq n$ a dále pak ještě $i_1 < \dots < i_p$ a $j_1 < \dots < j_q$. Pak matici $B(b_{kl})$ typu (p, q) , jejíž prvky jsou definovány vztahem

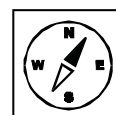
$$b_{kl} = a_{i_k j_l}$$

pro $1 \leq k \leq p$, $1 \leq l \leq q$, se nazývá *podmatice matice A typu (p, q)* . Je-li $p = q$, tj. je-li B čtvercová matice řádu p , pak říkáme, že B je *regulární* resp. *singulární podmatice matice A* podle toho, je-li $|B| \neq 0$ resp. $|B| = 0$.



Poznámka.

Právě vyslovená definice popisuje, i když poněkud komplikovaněji, tu okolnost, že vyznačíme-li v libovolné matici A typu (m, n) jistých p jejích řádků a q jejích sloupců, kde $p \leq m$, $q \leq n$, a vytvoříme-li matici B ze všech těchto prvků matice A ležících v průseku vybraných řádků a sloupců, získáme podmatici B matice A . Přitom se samozřejmě předpokládá, že původní struktura řádků a sloupců matice A zůstane zachována, tj. že libovolné dva prvky matice B leží v témže řádku resp. sloupci, jestliže náležely témuž řádku resp. sloupci v matici A .





8.3 Definice. Hodnost matice.

Hodností dané nenulové matice A budeme nazývat přirozené číslo $h = h(A)$ takové, pro něž platí:

- (i) Existuje alespoň jedna regulární podmatice matice A , která má řád h .
- (ii) Všechny čtvercové podmatice matice A řádu $h + 1$ jsou singulární.

Je-li A nulová matice, pak položíme $h(A) = 0$.

Poznámka.

Uvážíme-li podrobněji smysl obou podmínek (i) a (ii) z výše uvedené definice, pak snadno dojdeme k závěru, že hodnost libovolné nenulové matice je *nejvyšší řád její regulární podmatice*.

8.4 Věta.

Je-li A libovolná matice typu (m, n) a B libovolná její podmatice, pak platí:

- (i) $h(B) \leq h(A) \leq \min\{m, n\}$.
- (ii) Je-li $m = n$ a jestliže A je regulární matice řádu n , pak $h(A) = n$.
- (iii) Je-li A' matice transponovaná k matici A , pak $h(A') = h(A)$.

Poznámka.

V některých případech se hodnost matice dá určit vizuálně přímo z jejího explicitního tabulkového zápisu. Tak kupř. jestliže

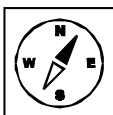
$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pak z ní lze vybrat regulární podmatici

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

řádu 2, přičemž regulární podmatici vyššího řádu už z matice A vybrat nelze. Je tedy $h(A) = 2$.

Ve většině případů to takto jednoduše ovšem nejde a pro určení hodnosti matice je nezbytná jistá její předchozí úprava.



8.5 Definice. Elementární úprava matice.

Nechť A je libovolná matice nad \mathbf{T} . Pak *řádkovou* resp. *sloupcovou elementární úpravou* této matice rozumíme



- (i) vzájemnou výměnu libovolných dvou řádků resp. sloupců;
- (ii) náhradu libovolného řádku resp. sloupce jeho c -násobkem, kde $c \in \mathbf{T}$, $c \neq 0$;
- (iii) přičtení c -násobku řádku resp. sloupce k jinému řádku resp. sloupci.

Elementární úpravou matice A budeme dále rozumět buď její řádkovou anebo sloupcovou úpravu.

**8.6 Věta.**

Hodnost matice se nezmění, provedeme-li libovolnou její elementární úpravu.

Poznámka.

Je-li A libovolná matice typu (m, n) nad \mathbf{T} , pak její řádky lze považovat za aritmetické vektory z V_n a podobně i její sloupce lze považovat za aritmetické vektory, tentokrát z V_m . To nám pak umožní hovořit o *lineární kombinaci řádků* resp. *sloupců* a také o jejich *lineární závislosti* či *nezávislosti*, přičemž máme na mysli lineární kombinace příslušných aritmetických vektorů.

8.7 Věta.

Má-li daná matice A hodnost h , pak v ní existuje h lineárně nezávislých řádků a také h lineárně nezávislých sloupců, přičemž každý další řádek resp. sloupec je už jejich lineární kombinací.

8.8 Věta.

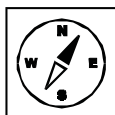
V každé matici je maximální počet lineárně nezávislých řádků roven maximálnímu počtu lineárně nezávislých sloupců a je též roven hodnosti této matice.

Poznámka. Z právě uvedeného tvrzení vyplývá, že existují tři navzájem ekvivalentní způsoby chápání pojmu hodnosti matice. Schematicky to lze znázornit takto:

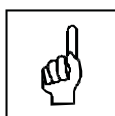
hodnost matice $\left\{ \begin{array}{l} \text{nejvyšší řád regulární podmatice} \\ \text{maximální počet lineárně nezávislých řádků} \\ \text{maximální počet lineárně nezávislých sloupců} \end{array} \right.$

Tyto způsoby chápání pojmu hodnosti matice se po řadě nazývají *minorová hodnost* resp. *řádková hodnost* resp. *sloupcová hodnost* dané matice, přičemž platí

$$\text{minorová hodnost} = \text{řádková hodnost} = \text{sloupcová hodnost}.$$



A nyní se již vrátíme k problému úpravy matice, na jejímž základě by se pak dala odhadnout hodnost matice vizuálně z jejího explicitního tabulkového zápisu.



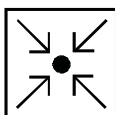
8.9 Definice. Stupňový resp. Gaussův tvar.

Řekneme, že matice $A = (a_{ij})$ typu (m, n) nad T je ve *stupňovém* nebo také *Gaussově tvaru*, platí-li pro všechna $r, s \in \mathbb{N}_m$ zároveň podmínky:

- (i) Je-li a_{rj} první nenulový prvek r -tého řádku, a_{sk} první nenulový prvek s -tého řádku, přičemž $r < s$, pak $j < k$.
- (ii) Každý nenulový řádek matice A má nižší řádkový index než libovolný nulový řádek téže matice.

Poznámka.

Poněkud volněji lze obě podmínky z výše uvedené definice interpretovat následovně. Podmínka (i) říká, že první nenulový prvek v libovolném řádku musí být vždy „více vlevo“, než v jakémkoliv řádku, který následuje. Podmínka (ii) pak říká, že všechny nulové řádky musí být v *dolní části* matice až za všemi jejími nenulovými řádky.



8.10 Příklad.

Rozhodněte, které z následujících matic A, B, C mají stupňový tvar, jestliže

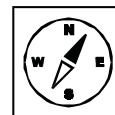
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Matice A není zřejmě ve stupňovém tvaru, neboť nesplňuje podmínku (ii) definice 8.9. A podobně ani matice B není v tomto tvaru, neboť nesplňuje podmínku (i) zmíněné definice — první nenulový prvek v prvním řádku není

více vlevo, než první nenulový prvek ve druhém řádku. A konečně, matice C splňuje zřejmě obě zmíněné podmínky (i) a (ii), takže ta jediná je ve stupňovém tvaru.

K úplné spokojenosti nám však v této chvíli chybí ještě odpověď na otázku, zdali lze každou matici převést na matici ve stupňovém tvaru a jak to případně prakticky provést. Odpověď na tuto otázku je obsažená v následujícím tvrzení.



8.11 Věta.

Každou matici lze upravit aplikací řádkových elementárních úprav na matici ve stupňovém tvaru.

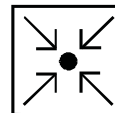
Poznámka.

Obecný návod, jak lze zmíněnou úpravu provést, je obsažen v důkazu tvrzení 8.11, který ovšem neuvádíme z důvodů, o nichž jsme hovořili v úvodních poznámkách k tomuto textu. K ilustraci nám však stejně dobře poslouží i následující příklad.

8.12 Příklad.

Pomocí řádkových elementárních úprav převedte na stupňový tvar matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$



Řešení:

Výpočet zahájíme tím, že v matici A ponecháme první její řádek a ten pak postupně násobíme čísly -2 , -1 resp. -4 a přičteme tyto násobky po řadě ke druhému, třetímu resp. čtvrtému řádku matice A . Dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

V této matici ponecháme první dva řádky, druhý řádek násobíme -2 resp. -3 a přičteme jej ke třetímu resp. ke čtvrtému řádku. Dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

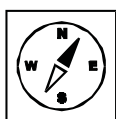
Celý výpočet pak ukončíme tím, že v této matici ponecháme první tři řádky, třetí řádek násobíme -1 a přičteme ke čtvrtému řádku. Dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

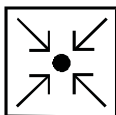
a to je již matice ve stupňovém tvaru.

Poznámky.

- (1) V rámci úprav při řešení předchozí úlohy jsme použili pouze řádkovou elementární úpravu (iii) z definice 8.5. Stejně tak je ovšem možné, a někdy i nutné, použít i některou ze zbývajících dvou řádkových úprav (i) resp. (ii).
- (2) Při provádění jednotlivých řádkových elementárních úprav se sice podle tvrzení 8.6 nemění hodnost výchozí matice, ale je třeba uvážit, že po provedení úpravy výchozí matice přejde zpravidla v matici, která je od výchozí matice různá ve smyslu definice 3.2. Prakticky to znamená, že mezi jednotlivé matice v řetězci jejich úprav *nelze psát znaménko rovnosti* $=$, které se v tomto případě obvykle nahrazuje symbolem \sim vyjadřujícím již zmíněnou skutečnost, že matice nalevo i napravo od tohoto symbolu mají touž hodnost.



Výklad v tomto odstavci uzavřeme ilustrací, jak se převodu matice na stupňový tvar dá použít při výpočtu její hodnosti. Abychom nemuseli znovu podrobně popisovat jednotlivé úpravy, použijeme k tomu matici z předchozí úlohy.



8.13 Příklad.

Vypočtete hodnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Pomocí řádkových elementárních úprav, které byly podrobně popsány v řešení předešlé úlohy, převedeme matici A na stupňový tvar. Zápis celého postupu

bude vypadat následovně:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Z poslední z uvedených matic je pak zřejmé, že její hodnost je 3, takže odtud pak již plyne, že také $h(A) = 3$.

8.14 Pojmy k zapamatování.

Hodnost matice,

regulární podmatice,

řádková elementární úprava,

sloupcová elementární úprava,

stupňový neboli Gaussův tvar matice.



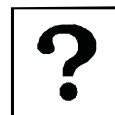
8.15 Kontrolní otázky.

Jak je definována hodnost matice?

Jak lze chápat třemi ekvivalentními způsoby hodnost matice?

Pomocí jakých úprav můžete převést matici do Gaussova tvaru?

Jak vypadá Gaussův tvar matice?



8.16 Neřešené úlohy.

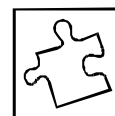
1. Určete hodnost matic postupným převodem na stupňový tvar.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}.$$



(c)

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 & 6 \\ -4 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(d)

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & -4 & 6 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Určete hodnost matic, jestliže

(a)

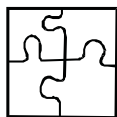
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & -1 & -8 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 7 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & 6 & 1 \\ 4 & -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

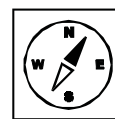
**8.17 Výsledky neřešených úloh.**

1. (a) $h(A) = 2$, (b) $h(B) = 2$, (c) $h(C) = 4$, $h(D) = 4$.

2. (a) $h(A) = 3$, (b) $h(B) = 4$, (c) $h(C) = 2$.

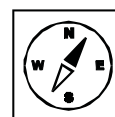
9 Řešitelné soustavy.

S využitím pojmu hodnosti matice lze nyní zformulovat nutnou a postačující podmínku řešitelnosti libovolné soustavy lineárních rovnic. K tomuto výsledku se nezávisle na sobě dopracovali němečtí matematici Georg Frobenius (1849–1917) a Leopold Kronecker (1823–1891), také italský matematik Alfredo Cappelì (1850–1910). Po prostudování budete umět určit, zda soustava je neřešitelná nebo jednoznačně řešitelná nebo více značně řešitelná. Budete umět převést soustavu do tvaru, z kterého jednodušeji určíte řešitelnost a řešení dané soustavy.



9.1 Klíčová slova.

Frobeniova věta, řešitelnost a neřešitelnost soustavy, ekvivalentní řešitelné soustavy.



9.2 Věta. (Frobeniova, též Kroneckerova-Cappeliova věta).

Soustava lineárních rovnic tvaru $AX = B$ s rozšířenou maticí soustavy A^* je řešitelná, právě když $h(A) = h(A^*)$, tj. když hodnost matice této soustavy A je též jako hodnost její rozšířené matice A^* .

Poznámka.

V této chvíli už tedy umíme posoudit, zda daná soustava lineárních rovnic má, či nemá řešení. Nevíme však dosud, jak to vypadá s počtem řešení v případě, že je řešitelná, a tímto problémem se budeme zabývat v další části tohoto odstavce.

9.3 Definice. Ekvivalentní řešitelné soustavy.

Dvě řešitelné soustavy lineárních rovnic se nazývají *ekvivalentní*, právě když každé řešení jedné soustavy je i řešením druhé soustavy a naopak.

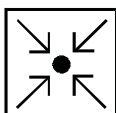


9.4 Věta.

Nechť $AX = B$ je soustava n lineárních rovnic o n neznámých s rozšířenou maticí soustavy A^* taková, že $h(A) = h(A^*) = h$. Pak existuje s ní ekvivalentní soustava h lineárních rovnic o n neznámých, jejíž rozšířená matice má stupňový tvar.

Poznámka.

Podobně jako v případě tvrzení 8.11 i zde je cesta vedoucí k ekvivalentní soustavě h lineárních rovnic o n neznámých popsána v důkazu tvrzení 9.4, který vypouštíme. K ilustraci celého postupu nám opět poslouží vhodný příklad. Navíc se ukazuje, že užitím tohoto postupu lze získat i samotná řešení uvažované soustavy.

**9.5 Příklad.**

Rozhodněte o řešitelnosti následující soustavy rovnic a v případě, že je řešitelná, najděte všechna její řešení.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11$$

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 17$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 16$$

Řešení:

Na první pohled by se mohlo zdát, že soustava je cramerovská a lze ji tedy vyřešit užitím Cramerova pravidla. O tom, že tomu tak není, nás snadno přesvědčí výpočet determinantu matice této soustavy, který je roven 0, což přenecháváme k samostatnému provedení. Cramerovo pravidlo je tedy nepoužitelné a vlastně v této chvíli ani nevíme, je-li daná soustava řešitelná. Abychom to zjistili, vyjdeme z rozšířené matice soustavy a její úpravou na stupňový tvar zjistíme najednou obě hodnoty, které k rozhodnutí o řešitelnosti potřebujeme. Celý výpočet vypadá kupř. takto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & \vdots & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 3 & \vdots & 17 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & \vdots & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & \vdots & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \vdots & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud vyplývá, že hodnota matice dané soustavy a také hodnota její rozšířené matice je 2, takže soustava je řešitelná. Jestliže v poslední matici vypustíme oba nulové řádky, dostaneme matici tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \vdots & 6 \end{pmatrix},$$

kteřá je rozšířenou maticí soustavy lineárních rovnic tvaru

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$$

$$x_2 + 2x_3 + x_4 = 6.$$

A právě to je ta soustava, o níž se hovoří v tvrzení 9.4, která je ekvivalentní s výchozí soustavou a má rozšířenou matici ve stupňovém tvaru. Řešení této soustavy získáme tak, že na levé straně v obou jejích rovnicích ponecháme pouze neznámé x_1 a x_2 , zbývající neznámé x_3 a x_4 převedeme napravo. Dostaneme soustavu

$$x_1 + x_2 = 5 - x_3 - x_4$$

$$x_2 = 6 - 2x_3 - x_4.$$

Položíme-li nyní $x_3 = u$, $x_4 = v$, kde $u, v \in \mathbb{R}$, pak dosazením dostaneme

$$x_1 + x_2 = 5 - u - v$$

$$x_2 = 6 - 2u - v.$$

Dospěli jsme tím k soustavě dvou lineárních rovnic o dvou neznámých se dvěma parametry u a v . Dosazením za x_2 z druhé do první rovnice dostaneme

$$x_1 = -1 + u$$

a máme tento závěr:

Uvažovaná soustava má nekonečně mnoho řešení $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \in V_4$, jehož složky lze vyjádřit ve tvaru

$$\xi_1 = -1 + u$$

$$\xi_2 = 6 - 2u - v$$

$$\xi_3 = u$$

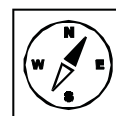
$$\xi_4 = v,$$

kde $u, v \in \mathbb{R}$.

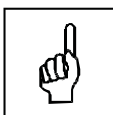
Výklad v tomto odstavci uzavřeme následujícím tvrzením, které sumarizuje výsledky týkající se řešitelnosti soustavy lineárních rovnic.

9.6 Věta.

Jestliže $AX = B$ je soustava n lineárních rovnic o n neznámých s rozšířenou maticí soustavy A^* , pak platí následující tvrzení:



- (i) Soustava je jednoznačně řešitelná, právě když $h(A) = h(A^*) = n$.
- (ii) Soustava je víceznačně řešitelná a má pak nekonečně mnoho řešení, právě když $h(A) = h(A^*) < n$.
- (iii) Soustava je neřešitelná, právě když $h(A^*) = h(A) + 1$.



9.7 Pojmy k zapamatování.

Frobeniova věta,
 ekvivalentní řešitelné soustavy,
 neřešitelnost soustavy,
 jednoznačná řešitelnost soustavy,
 víceznačná řešitelnost soustavy.



9.8 Kontrolní otázky.

Kdy je soustava řešitelná?

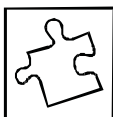
Jak souvisí řešitelnost soustavy s hodnotí matic soustavy?

Kdy jsou dvě řešitelné soustavy ekvivalentní?

Kdy je soustava lineárních rovnic jednoznačně řešitelná?

Kdy je soustava lineárních rovnic víceznačně řešitelná?

Kdy je soustava lineárních rovnic neřešitelná?



9.9 Neřešené úlohy.

Zjistěte, zda daná soustava rovnic je řešitelná a pokud ano, pak nalezněte všechna její řešení.

1.

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 5$$

$$x_1 + x_2 + 5x_3 = -7$$

$$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14$$

2.

$$x_1 + x_2 - 3x_3 = -1$$

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1$$

3.

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4$$

$$x_2 - x_3 + x_4 = -3$$

$$x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1$$

$$-7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3$$

4.

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4$$

$$x_2 - x_3 + x_4 = 3$$

$$x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1$$

$$-7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3$$

5.

$$x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3$$

$$3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0$$

$$4x_1 - x_2 + x_3 = 3$$

6.

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

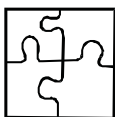
7.

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 3$$

$$2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 2$$

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1$$

$$3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 3$$

**9.10 Výsledky neřešených úloh.**

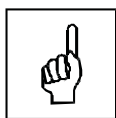
1. Jediné řešení $x_1 = 1, x_2 = 2x_3 = -2$.
2. Nemá řešení.
3. Nekonečně mnoho řešení $x_1 = -8, x_2 = 3 + t, x_3 = 6 + 2t, x_4 = t, t \in \mathbb{R}$.
4. Nemá řešení.
5. Jediné řešení $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1$.
6. Nekonečně mnoho řešení $x_1 = r, x_2 = s, x_3 = -r + 2s, x_4 = 1$.
7. Nemá řešení.

a n je počet neznámých. Jádro problému řešitelnosti homogenních soustav je hlavně v tom, za jakých okolností má tato soustava také netriviální řešení a jak tato řešení vypadají.

10.4 Věta.

Nechť $AX = 0$ je homogenní soustava lineárních rovnic, n je počet jejích neznámých a $h(A)$ hodnost její matice soustavy. Pak množina všech jejích řešení je podprostorem aritmetického vektorového prostoru V_n a má dimenzi $d = n - h(A)$.

10.5 Definice. Obecné řešení homogenní soustavy.

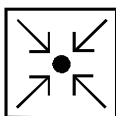


Podprostor aritmetického vektorového prostoru V_n obsahující všechna řešení homogenní soustavy lineárních rovnic se nazývá *obecné řešení této soustavy*, libovolná báze tohoto podprostoru se pak nazývá *fundamentální systém řešení této soustavy*.

Poznámka.

Problém v řešení homogenní soustavy lineárních rovnic spočívá tedy zřejmě hlavně ve zjištění, zda tato soustava má netriviální řešení a v případě, že ano, pak musíme určit fundamentální systém řešení a obecné řešení této soustavy. Jak to vypadá konkrétně si ukážeme na příkladě.

10.6 Příklad.



Řešte homogenní soustavu lineárních rovnic tvaru

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0 \\-2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 4x_5 &= 0 \\-x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 - x_5 &= 0\end{aligned}$$

Řešení:

Vydeme z matice soustavy, kterou pomocí řádkových elementárních úprav převedeme na stupňový tvar. Tím získáme jednak hodnost h této matice, ale také i homogenní soustavu h rovnic, která je ekvivalentní s výchozí soustavou.

Prakticky to vypadá takto:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 \\ -2 & -4 & 2 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \sim \\ & \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Odtud vyplývá, že $h = 2 < 5 = n$, takže daná homogenní soustava má netriviální řešení, přičemž všechna její řešení tvoří podprostor dimenze $d = n - h = 5 - 2 = 3$ aritmetického vektorového prostoru V_5 . Vypustíme-li z poslední z výše uvedených matic nulový řádek, dostaneme matici tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

která je maticí homogenní soustavy

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0 \\ x_4 - x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Tato soustava je podle tvrzení 9.4 ekvivalentní s původní soustavou a má rozšířenou matici ve stupňovém tvaru. Fundamentální systém řešení nyní dostaneme úpravou získané soustavy tak, že na levé straně necháme jen neznámé x_3 a x_4 a všechny zbývající neznámé převedeme napravo. Dostaneme

$$\begin{aligned} -x_3 + x_4 &= -x_1 - 2x_2 + 5x_5 \\ x_4 &= x_5, \end{aligned}$$

přičemž neznámé na levé straně, v našem případě x_3 a x_4 , se nazývají *bázické*, všechny zbývající pak *nebázické*. Za nebázické neznámé nyní budeme dosazovat, a to tak, že za jednu z nich dosadíme 1, za zbývající pak 0. V našem případě máme tedy celkem tři možnosti, a sice

$$\begin{aligned} x_1 = 1, x_2 = x_5 = 0, \\ x_2 = 1, x_1 = x_5 = 0, \\ x_5 = 1, x_1 = x_2 = 0. \end{aligned}$$

Po dosazení dostaneme vždy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, která je cramerovská a má tedy vždy jediné řešení. V prvním případě dostaneme

soustavu tvaru

$$\begin{aligned} -x_3 + x_4 &= -1 \\ x_4 &= 0, \end{aligned}$$

která má řešení $x_3 = 1, x_4 = 0$. Ve druhém případě dostaneme soustavu tvaru

$$\begin{aligned} -x_3 + x_4 &= -2 \\ x_4 &= 0, \end{aligned}$$

a ta má řešení $x_3 = 2, x_4 = 0$. A konečně, ve třetím případě dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} -x_3 + x_4 &= 5 \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$$

mající řešení $x_3 = -4, x_4 = 1$. Dáme-li nyní dohromady dosazované hodnoty nebázičkových neznámých spolu s odpovídajícími hodnotami bázičkových neznámých, které jsme získali řešením získaných cramerovských soustav, a vytvoříme-li z nich aritmetické vektory, dostaneme trojici vektorů

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (1, 0, 1, 0, 0), \\ \vec{b} &= (0, 1, 2, 0, 0), \\ \vec{c} &= (0, 0, -4, 1, 1). \end{aligned}$$

Tyto tři vektory tvoří hledaný fundamentální systém řešení dané homogenní soustavy, přičemž libovolné její řešení lze pak vyjádřit jako jejich lineární kombinaci ve tvaru

$$\alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} + \alpha_3 \vec{c},$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ jsou libovolná reálná čísla. Dosazením a úpravou pak dostaneme obecné řešení dané soustavy ve tvaru

$$\begin{aligned} &\alpha_1(1, 0, 1, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 2, 0, 0) + \alpha_3(0, 0, -4, 1, 1) = \\ &= (\alpha_1, 0, \alpha_1, 0, 0) + (0, \alpha_2, 2\alpha_2, 0, 0) + (0, 0, -4\alpha_3, \alpha_3, \alpha_3) = \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\alpha_3, \alpha_3, \alpha_3), \text{ kde } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Výklad v tomto odstavci uzavřeme formulací tvrzení, které je důsledkem tvrzení 9.6 z předchozího odstavce.



10.7 Věta.

Soustava homogenních rovnic $AX = 0$ o n neznámých má netriviální řešení, právě když $h(A) < n$ a má pouze triviální řešení, právě když $h(A) = n$.

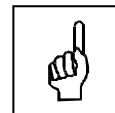
10.8 Pojmy k zapamatování.

Homogenní soustava lineárních rovnic,

triviální řešení soustavy,

obecné řešení homogenní soustavy,

fundamentální systém řešení homogenní soustavy lineárních rovnic.

**10.9 Kontrolní otázky.**

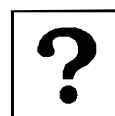
Za jakých podmínek je homogenní soustava lineárních rovnic řešitelná?

Co je to triviální řešení soustavy?

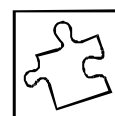
Kdy má homogenní soustava lineárních rovnic triviální řešení?

Je-li n počet neznámých a $h(A)$ hodnota matice homogenní soustavy lineárních rovnic, jakou dimenzi má množina všech řešení této soustavy jakožto podprostor aritmetického vektorového prostoru V_n ?

Kdy má homogenní soustava lineárních rovnic netriviální řešení?

**10.10 Neřešené úlohy.**

Řešte homogenní soustavy rovnic.



1.

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

2.

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0$$

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0$$

3.

$$\begin{aligned}2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 0 \\3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 &= 0 \\4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 &= 0 \\7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0\end{aligned}$$

4.

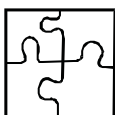
$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= 0 \\3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 &= 0 \\2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= 0\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\3x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 0 \\x_1 + 17x_2 + 4x_3 &= 0\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 &= 0 \\2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 0 \\7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \\4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 &= 0\end{aligned}$$



10.11 Výsledky neřešených úloh.


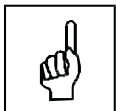





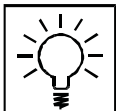

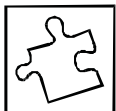
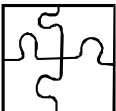
1. Pouze triviální řešení.
2. Pouze triviální řešení.
3. Fundamentální systém řešení: $\vec{u} = (3, 19, 17, 0)$, $\vec{v} = (-13, -20, 0, 17)$, tedy obecné řešení má tvar $(3\alpha_1 - 13\alpha_2, 19\alpha_1 - 20\alpha_2, 17\alpha_1, 17\alpha_2)$.

4. Fundamentální systém řešení: $\vec{u} = (-1, -1, 1, 2, 0)$, $\vec{v} = (7, 5, -5, 0, 8)$,
tedy obecné řešení má tvar $(-\alpha_1 + 7\alpha_2, -\alpha_1 + 5\alpha_2, \alpha_1 - 5\alpha_2, 2\alpha_1, 8\alpha_2)$.
5. Fundamentální systém řešení: $\vec{u} = (-11, -1, 7)$, tedy obecné řešení má
tvar $-11\alpha_1, -\alpha_2, 7\alpha_3$.
6. Fundamentální systém řešení: $\vec{u} = (3, 19, 17, 0)$, $\vec{v} = (-13, -20, 0, 17)$,
tedy obecné řešení má tvar $(3\alpha_1 - 13\alpha_2, 19\alpha_1 - 20\alpha_2, 17\alpha_1, 17\alpha_2)$.

Literatura

- [1] BICAN, L. *Lineární algebra*. Praha : SNTL, 1979.
- [2] BURIAN, K. *Algebra – lineární algebra*. Ostrava : Pedagogická fakulta v Ostravě, 1973.
- [3] ČULÍK, K. *Algebra II*. Praha : SON, 1966.
- [4] HAVEL, V. *Lineární algebra*. Brno : ediční středisko VUT, 1980.
- [5] HAVEL, V., HOLENDÁ, J. *Lineární algebra*. Praha : SNTL/ALFA, 1984.
- [6] HAVEL, V. *Algebra a geometrie*. Brno : PC-DIR, 1993.
- [7] HORSKÝ, Z. *Vektorové prostory*. Praha : SNTL, 1981.
- [8] SKRÁŠEK, J., TICHÝ, Z. *Základy aplikované matematiky I*. Praha : SNTL, 1983.

Použité symboly

| Symbol | Popis |
|---|----------------------|
|  | Průvodce studiem |
|  | Příklad |
|  | Pojmy k zapamatování |
|  | Shrnutí |
|  | Literatura |
|  | Kontrolní otázky |
|  | Úkoly k textu |
|  | Korespondenční úkoly |
|  | Úkoly k zamyšlení |
|  | Část pro zájemce |
|  | Testy a otázky |
|  | Řešení a odpovědi |